Lista 4

1. (Gauss) Seja $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Se $r/s \in \mathbb{Q}$ é uma raiz de f e $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$, então $s \mid a_n$ e $r \mid a_0$.

2. Mostre que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$. e determine o polinômio mínimo de $i + \sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

3. É verdade que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$?

4. Determine o polinômio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ de cada um dos números reais abaixo:

(a) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}$; (b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1}$; (c) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;
(d) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; (e) $1 - \sqrt[5]{4}$.

5. Seja $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$. Para cada $u \in \{\sqrt{-5}, i + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$:

(a) Determine o polinômio mínimo $P_{u,\mathbb{Q}}$;
(b) Prove ou refute a igualdade $F = \mathbb{Q}(u)$.

6. (a) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,)$ e calcule o grau dessa extensão;
(b) Conclua que todo elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,)$ pode ser escrito na forma $x + y\sqrt{2+\sqrt{2}}$, onde x, y são da forma $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

7. Decida se $i \in \mathbb{C}$ pertence ou não a cada um dos corpos abaixo:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}\,)$ (b) $\mathbb{Q}(u)$, onde $u \in \mathbb{C}$ satisfaz $u^3 + u + 1 = 0$.

8. Seja $F \supset k$ uma extensão de corpos de grau n e $f \in k[x]$ um polinômio irredutível, com $\mathrm{grau}\, f = m$. Prove que se $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, então f é irredutível em $F[x]$.

9. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova breve ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Dado $n \geq 1$, existe um corpo F tal que $[F : \mathbb{Q}] = n$.
(b) Se uma extensão de corpos tem grau infinito, então ela não é algébrica.
(c) Um polinômio de grau 3 com coeficientes em um corpo é irredutível se e somente se não possui uma raiz neste corpo.
(d) Idem ao item anterior para polinômios de grau 4.
(e) Os corpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\,)$ são isomorfos.