Lista 0 – conjuntos

Abaixo, X, Y são conjuntos quaisquer.

1. Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre:

(a) f é *injetora* se e somente se existe $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(b) f é *sobrejetora* se e somente se existe $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) f é uma *bijeção* se e somente se existe $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

2. Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$ subconjuntos. Dada uma função $f\colon X \to Y$ definimos a *imagem* de A por f e a *pré-imagem* de B por f:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \quad \text{e} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Mostre:

(a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Vale a igualdade se f é injetora.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Vale a igualdade se f é sobrejetora.

(c) Dê exemplos em (a) e (b) onde não valem as igualdades.

(d) Dê exemplos em (a) e (b) onde valem as igualdades mas f não é nem injetora e nem sobrejetora.

3. Se X, Y são finitos e de mesma cardinalidade, então $f\colon X \to Y$ é injetora se e somente se é sobrejetora.

4. Se X é infinito, então existe uma função injetora $\mathbb{N} \hookrightarrow X$. Ou seja: todo conjunto infinito contém uma cópia do conjunto dos números naturais.

5. Um conjunto é infinito se e só se existe admite uma bijeção com um subconjunto próprio.

6. (Cantor–Schroeder–Bernstein) Suponha que existam funções injetoras $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$. Então existe uma bijeção $h\colon X \to Y$. (Esse é difícil. Se a curiosidade for maior que seu fôlego, consulte a Wikipedia ou o livro *Topology*, de James Munkrees).