UFF - Instituto de Matemática — Álgebra III – 2015/2

Data: 16 fev 2016. — www.professores.uff.br/nmedeiros

Lista 1

1. Seja A_n o subgrupo das permutações pares de S_n. Mostre que A_n é um subgrupo normal e que, para $n \geq 3$, vale $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Sejam a, b, c, d inteiros distintos. Verifique que as seguintes igualdades em S_n são válidas:

$$(ab)(cd) = (abc)(bcd) \quad \text{e} \quad (ab)(bc) = (abc).$$

Como aplicação, prove que se H é um subgrupo de A_n que contém todos os 3-ciclos, então $H = A_n$.

3. Seja G um grupo. Recorde que o *centro* de G é definido por

$$Z(G) := \{x \in G \mid gx = xg \quad \forall g \in G\}.$$

Mostre que $Z(G)$ é um subgrupo normal de G. Observe que G é abeliano se e somente se $Z(G) = G$, ou seja, $G/Z(G)$ é trivial.

4. Calcule $Z(S_3)$ e $Z(D_4)$.

5. Seja G um grupo. Dado $g \in G$, mostre:

(a) $o(g) = o(g^{-1}) = o(x^{-1}gx)$, para todo $x \in G$.

(b) Se $g \neq 1$, então g tem ordem 2 se, e somente se, $g = g^{-1}$.

(c) Se $g^n = 1$, então $o(g)$ divide n.

(d) Se $o(g) = mn$, então $o(g^m) = n$.

(e) Se $o(g) = n$, então $o(g^s) = \frac{n}{\mathrm{mdc}(n,s)}$, para cada $s \in \mathbb{Z}$.

6. Mostre que se G é um grupo finito e $g \in G$, então $o(g)$ divide $|G|$.

7. Se A e B são subgrupos de um grupo finito e tais que $\mathrm{mdc}(|A|, |B|) = 1$, então $A \cap B = \{1\}$ (sugestão: exercício anterior).

8. Se todos os elementos de um grupo G possuem ordem 2, então G é abeliano.

9. Sejam A, B subgrupos de G. Mostre:

(a) $AB < G \iff AB = BA$.

(b) Se $A \lhd G$ ou $B \lhd G$, então $AB = BA$ (e logo AB é um subgrupo de G, por (a)).

(c) Se A e B são ambos normais em G, então AB é um sugbrupo normal de G.

10. Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Mostre que se G é abeliano, então G/N é abeliano; e se G é cíclico, então G/N é cíclico. Alguma das recíprocas é válida?

11. O *normalizador* (*centralizador*) um elemento $g \in G$ é $C(g) := \{x \in G \mid gx = xg\}$. Prove:

(a) $C(g)$ é um subgrupo de G.

(b) $g \in Z(G)$ se, e somente se, $C(g) = G$.

(c) $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C(g)$.

12. (Teorema Chinês dos Restos) Sejam m, n inteiros e considere o homomorfismo $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ dado por $\varphi(a) = (\overline{a}, \overline{\overline{a}})$.

(a) Mostre que seu núcleo é mmc$(m, n)\mathbb{Z}$;

(b) Mostre que se m, n são primos entre si, então $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$; em outras palavras, se mdc$(m, n) = 1$, então $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ é cíclico.

(c) Generalize o item (b) para inteiros $m_1, \ldots, m_k$ relativamente primos dois a dois.

13. Sejam A, B dois subgrupos normais de um grupo G. Vimos que $A \cdot B$ também é um subgrupo normal. Suponha que $A \cap B = \{1\}$.

(a) Dados $a \in A$, $b \in B$, mostre que $aba^{-1}b^{-1} = 1$ e logo $ab = ba$.

(b) Suponha que $A \cdot B = G$. Prove que a função $\varphi \colon A \times B \to G$ dada por $(a, b) \mapsto ab$ é um isomorfismo.

Automorfismos.

14. Um *automorfismo* de um grupo G é um isomorfismo de G em si mesmo. Mostre que Aut(G) (o conjunto dos automorfismos de G) com a operação de composição, é um grupo.

15. Se G é um grupo abeliano, então $\varphi \colon G \to G$ dado por $\varphi(g) = g^{-1}$ é um automorfismo.

16. Seja G um grupo. Fixado $g \in G$, defina $\iota_g \colon G \to G$ por $\iota_g(x) := gxg^{-1}$.

(a) Mostre que ι_g é um automorfismo de G.

(b) Seja $\operatorname{Int} G := \{\iota_g \mid g \in G\}$. Mostre que $\operatorname{Int} G$ é um subgrupo normal de $\operatorname{Aut} G$ (denominado o subgrupo dos *automorfismos internos de* G).

(c) Prove que $\operatorname{Int} G \cong G/Z(G)$, onde $Z(G)$ é o centro de G. (Sugestão: mostre que $g \mapsto \iota_g$ define um homomorfismo sobrejetor de G em $\operatorname{Int} G$ e utilize o Teorema dos Homomorfismos).