Lista 2

1. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova sucinta ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Se $A \lhd G$ e $B \lhd G$, então $A \cap B$ é normal em G.

(b) Se todos elementos os elementos de G têm ordem finita, então G é um grupo finito.

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo cíclico.

(d) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo cíclico.

(e) $(S^1, \cdot)$ é um grupo cíclico.

(f) Se $A < B < G$ é uma cadeia de subgrupos e A é normal em G, então A é normal em B.

(g) Se $A < B < G$ é uma cadeia de subgrupos com $A \lhd B$ e $B \lhd G$, então A é normal em G.

2. Seja G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Denote $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. Defina

$$\langle S \rangle = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in S \cup S^{-1}\}$$

ou seja, $\langle S \rangle$ é o conjunto de todos os produtos finitos de elementos de S ou de S^{-1}. Mostre que $\langle S \rangle$ é um subgrupo de G, chamado o *subgrupo gerado por* S.

3. Continuando o exercício anterior, prove que mostre que $\langle S \rangle$ é o menor subgrupo de G contendo S, isto é, $\langle S \rangle = \bigcap H$, onde H percorre todos os subgrupos de G que contém S.

4. Mostre que: a) $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$; b) $D_4 = \langle r_{\pi/2}, \rho \rangle$, onde $r_{\pi/2}$ é a rotação de 90 graus e ρ é qualquer uma das quatro reflexões do quadrado;

5. O grupo simétrico S_n é gerado pelas transposições. O grupo alternado A_n é gerado pelos 3-ciclos.

6. Para todo $n \geq 3$, o grupo diedral D_n é gerado por uma rotação e uma reflexão.

7. Seja G um grupo e $S = \{\text{subgrupos de } G\}$. Mostre que G age em S por conjugação, ou seja, que $g \mapsto \iota_g \colon S \to S$, $\iota_g(H) = gHg^{-1}$ é uma ação de G em S.

8. Seja $A = Q[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis. Então o grupo simétrico S_n age em A permutando as variáveis: dada uma permutação σ em S_n, definimos $\sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Por exemplo,

$$\text{se } \sigma = (14)(23) \text{ e } f = 3x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_5^2 - 2x_4^7, \quad \text{então } \sigma(f) = 3x_4 \cdot x_2 - x_3 \cdot x_5^2 - 2x_1^7.$$

(a) Prove que esta é de fato uma ação.

(b) Para S_3 agindo em $A = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$, calcule os estabilizadores de

$$f = x_1x_2x_3, \quad g = x_2x_1 + x_2x_3 \quad \text{e} \quad h = 2f + g$$

(c) Dê exemplo de um polinômio em quatro variáveis cujo estabilizador em S_4 seja o subgrupo de Klein.

Extras.

9. Prove que um grupo cíclico de ordem n possui exatamente $\phi(n)$ geradores, onde ϕ é a função de Euler (sugestão: $\mathbb{Z}_n$).

10. Seja G um grupo finito tal que, para cada divisor d da ordem de G, tem-se que G possui no máximo um subgrupo de ordem d. Prove que G é cíclico.

Roteiro: sejam n a ordem de G e n_d o número de elementos de ordem d em G. Vamos provar que $n_d = \phi(d)$ para todo fator d de n. Em particular, G possui $\phi(n)$ elementos de ordem n.

Observe que $\sum_{d|n} n_d = n$. Como $n = \sum_{d|n} \phi(d)$, basta então mostrar $n_d \leq \phi(d)$ para todo $d \mid n$, onde entra a hipótese.

11. Seja F um domínio. Então todo subgrupo finito de F^* é cíclico (sugestão: use o exercício anterior; note que o polinômio $x^d - 1$ tem no máximo d raízes no domínio F). Em particular, se F é um corpo com um número finito de elementos, então F^* é cíclico.