Lista 3

1. Um grupo de ordem $11^2 \cdot 13^2$ é abeliano.

2. Um grupo de ordem 28 que possui um subgrupo normal de ordem 4 é abeliano.

3. Se p é um primo ímpar, então um grupo de ordem $2p$ possui um subgrupo normal não-trivial.

4. Todo grupo de ordem 33, 35 ou 65 é cíclico.

5. Sejam p, q primos com $p < q$ e tais que p não divide $q - 1$. Então um grupo com ordem pq é cíclico.

6. Sejam p, q primos distintos. Um grupo com ordem p^2q possui um subgrupo normal não-trivial.

7. Seja G um grupo de ordem 30. O objetivo é mostrar, usando os teoremas de Sylow, que os subgrupos de ordens 3 e 5 são normais em G.

Seja n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Mostre:

(a) $n_3 = 1$ ou $n_3 = 10$; $n_5 = 1$ ou $n_5 = 6$.

Agora, um argumento de contagem.

(b) Se $n_3 > 1$, então teríamos 20 elementos distintos de ordem 3 em G.

(c) Se $n_5 > 1$, então teríamos 24 elementos distintos de ordem 5 em G.

(d) Conclua que não podemos ter $n_3 > 1$ e $n_5 > 1$.

(e) Tome A, B subgrupos de G de ordens 3 e 5. Então um deles é normal em G.

(f) Seja $H = AB$. Então H é um subgrupo de G, de ordem 15. Como $(G : H) = 2$, vimos que H é normal em G.

(g) O único subgrupo de H de ordem 3 é A; o único subgrupo de H de ordem 5 é B (aplique os Teoremas de Sylow ao grupo H).

(h) Usando que H é normal em G e o item anterior, mostre que $gAg^{-1} = A$ para todo $g \in G$, ou seja, A é normal em G. Analogamente, B é normal em G.

(i) Conclua que $n_3 = n_5 = 1$.

8. Seja G um grupo finito de ordem $n = p^a q^b$, onde p e q são números primos distintos. Sejam P e Q um p-subgrupo e um q-subgrupo de Sylow de G, respectivamente. Assuma que P e Q são normais em G. Usando o Exercício 13 da Lista 1, mostre que $G \cong P \times Q$.

9. Generalizamos o exercício anterior. Seja G um grupo finito de ordem $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, onde os p_i's são primos distintos entre si e os a_i's são inteiros positivos. Seja P_i um p_i-subgrupo de Sylow de G e assuma que P_i é normal em G para cada $i = 1, \ldots, k$.

(a) Mostre que a função

$$\begin{aligned} \varphi \colon P_1 \times \cdots \times P_k &\to G \\ (h_1, \ldots, h_k) &\mapsto h_1 \cdots h_k \end{aligned}$$

é uma bijeção.

(b) Mostre que se $h_i \in P_i$, $h_j \in P_j$, então $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} \in P_i \cap P_j$ e logo $h_i h_j = h_j h_i$. Conclua que φ é um homomorfismo e, daí, que $G \cong P_1 \times \cdots \times P_k$. (Em particular, se G é abeliano, então G é isomorfo ao produto direto dos seus subgrupos de Sylow).

(c) Como consequência de (b), mostre que vale a recíproca do teorema de Lagrange para grupos abelianos: se G é abeliano e d divide a ordem de G, então existe um subgrupo H de G com $|H| = d$.

Extras.

10. Seja G um grupo, $a, b \in G \setminus \{1\}$ tais que $a^5 = 1, aba^{-1} = b^2$. Qual a ordem de b?

11. Seja $G = \langle a, b \rangle$ um grupo tal que seus geradores comutam entre si, isto é, $ab = ba$. Prove que G é abeliano.

Sugestão: mostre que a^{-1} e b^{-1} comutam; que a e b^{-1} comutam; e que a^{-1} e b também comutam.

12. Segue do exercício anterior que se $G = \langle S \rangle$ é tal que todos os elementos de S comutam entre si, então G é abeliano. Correto?

13. Seja G um grupo. Um *comutador* de G é um elemento da forma $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$, onde $x, y \in G$. O *subgrupo dos comutadores de* G (ou o subgrupo *derivado*) é o menor subgrupo de G que contém todos os comutadores, isto é,

$$G' := \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle.$$

Prove:

(a) G' é normal em G;

(b) G/G' é abeliano;

(c) G' é o menor subgrupo normal de G cujo quociente é abeliano. Precisamente:

H é normal em G com G/H abeliano se e somente se G' está contido em H.

Note que G é abeliano se e somente se $\mathsf{G}' = \{1\}$. O quociente G/G' é chamado uma *abelianização* de G.

14. (Grupos de ordem 8) Considere as matrizes complexas

$$\mathbf{1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathrm{I} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathsf{J} = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \mathsf{K} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Estas matrizes satisfazem algumas relações como por exemplo

$$\mathrm{I}^2 = \mathsf{J}^2 = \mathsf{K}^2 = \mathrm{I}\mathsf{J}\mathsf{K} = -\mathbf{1}, \mathrm{I}\mathsf{J} = \mathsf{K}, \mathsf{J}\mathrm{I} = -\mathsf{K},$$

$$\mathsf{J}\mathsf{K} = \mathrm{I}, \mathsf{K}\mathsf{J} = -\mathrm{I}, \mathsf{K}\mathrm{I} = \mathsf{J}, \mathrm{I}\mathsf{K} = -\mathsf{J}$$

(verifique caso sinta necessidade). Seja $\mathsf{Q} := \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathrm{I}, \pm\mathsf{J}, \pm\mathsf{K}\}$. Mostre:

(a) Q é um grupo *não-abeliano* de ordem $\mathbf{8}$ e $\mathsf{Q} = \langle \mathrm{I}, \mathsf{J} \rangle$.

(b) Q possui exatamente 4 subgrupos não-triviais.

(c) Todos os subgrupos de Q são normais.

(d) Os grupos Q e D_4 não são isomorfos (note que são ambos não abelianos).

(e) Encontre 3 grupos abelianos de ordem 8 não isomorfos entre si. Palavra-mágica: produto direto.

Concluindo: você encontrou 5 grupos de ordem 8 não isomorfos entre si. Não adianta procurar por outros: pode-se mostrar que estes são todos. O grupo Q é o *grupo dos quatérnios*.

15. Existem exatamente 5 grupos de ordem 12 não isomorfos entre si. Não vamos provar isso completamente aqui, mas eis um esboço do argumento. Prove:

(a) A_4 não possui elementos de ordem 6.

(b) A_4 e D_6 não são isomorfos.

(c) Existem 2 grupos abelianos de ordem 12 não isomorfos entre si.

Você encontrou 4 grupos de ordem 12 não isomorfos entre si. Existe mais um grupo de ordem 12, não-abeliano, que não é isomorfo a nenhum dos 4 grupos acima: é dado pelo produto *semi-direto* $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$, algo que não vimos em sala. De fato não há outros.