Lista 4

1. Mostre que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$. e determine o polinômio mínimo de $i + \sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

2. É verdade que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$?

3. Determine o polinômio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ de cada um dos números reais abaixo:

(a) $\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}}$; (b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-1}$; (c) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$;

(d) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$; (e) $1 - \sqrt[5]{4}$.

4. Seja $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$. Para cada $u \in \{\sqrt{-5}, i + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$:

(a) Determine o polinômio mínimo $P_{u,\mathbb{Q}}$;

(b) Prove ou refute a igualdade $F = \mathbb{Q}(u)$.

5. (a) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,)$ e calcule o grau dessa extensão;

(b) Conclua que todo elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,)$ pode ser escrito na forma $x + y\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, onde x, y são da forma $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

6. Decida se $i \in \mathbb{C}$ pertence ou não a cada um dos corpos abaixo:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}\,)$ (b) $\mathbb{Q}(u)$, onde $u \in \mathbb{C}$ satisfaz $u^3 + u + 1 = 0$.

7. Seja $F \supset k$ uma extensão de corpos de grau n e $f \in k[x]$ um polinômio irredutível, com $\operatorname{grau} f = m$. Prove que se $\operatorname{mdc}(m, n) = 1$, então f é irredutível em $F[x]$.

8. **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova breve ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) Dado $n \geq 1$, existe um corpo F tal que $[F : \mathbb{Q}] = n$.

(b) Se uma extensão de corpos tem grau infinito, então ela não é algébrica.

(c) Um polinômio de grau 3 com coeficientes em um corpo é irredutível se e somente se não possui uma raiz neste corpo.

(d) Idem ao item anterior para polinômios de grau 4.

(e) Os corpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\,)$ são isomorfos.

9. Sejam u, v algébricos sobre um corpo k. Mostre que $[k(u,v) : k(u)] \leq k(v)$. Apresente um exemplo onde vale a desigualdade estrita.

10. Se $u_1, \dots, u_n$ são algébricos sobre k, então $k(u_1, \dots, u_n) \supset k$ é uma extensão finita.

11. Considere uma torre de extensões de corpos $k \subset E \subset F$. Vamos provar que se $k \subset E$ e $E \subset F$ são extensões algébricas, então $k \subset F$ também é algébrica.

Tome v em F e seja $q = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \in E[x]$ o seu polinômio mínimo sobre E. Mostre que (faça um diagrama):

(a) v é algébrico sobre o corpo $k(b_0, \dots, b_n)$.

(b) $k(b_0, \dots, b_n) \supset k$ é uma extensão finita.

(c) $k(v, b_0, \dots, b_n) \supset k$ é uma extensão finita.

(d) Conclua que v é algébrico sobre k.

12. Seja p um número primo e $\omega = e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$ uma raiz p-ésima da unidade. Considere o polinômio $g := x^{p-1} + \dots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Usando a identidade $x^p - 1 = (x-1)g$, mostre que $g(\omega) = 0$.

(b) Substituindo $x \mapsto x+1$ na identidade do item anterior e usando o critério de Eisenstein, mostre que g é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Conclua que g é o polinômio mínimo de ω sobre $\mathbb{Q}$

(d) Mostre que $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = p - 1$.

13. Mostre que se $F \supset \mathbb{C}$ é uma extensão algébrica, então $F = \mathbb{C}$.

14. Seja u algébrico sobre um corpo k e seja $p = p_{u,k} \in k[x]$ o seu polinômio mínimo. Temos então um homomorfismo natural (entre anéis) $k[x] \to k(u)$, chamado o *homomorfismo de avaliação*, dado simplesmente por $f \mapsto f(u)$.

(a) O núcleo deste homomorfismo é o ideal (p).

(b) Este homomorfismo é sobrejetor (dica: u é algébrico sobre k).

(c) Usando o teorema dos homomorfismos (para anéis), conclua que $k(u) \cong \frac{k[x]}{(p)}$.