UFF - Instituto de Matemática — Álgebra III – 2015/2
Data: 17 mar 2016 — www.professores.uff.br/nmedeiros

Lista 6

1. Neste exercício vamos investigar propriedades de extensões normais.

(a) Mostre que toda extensão de grau 2 é normal.

(b) Dê um exemplo de uma torre de extensões $F \supset E \supset k$ tal que:

i. $F \supset k$ é normal mas $E \supset k$ não é normal.

ii. $F \supset E$ e $E \supset k$ são normais mas $F \supset k$ não é normal.

(*Salva-vidas:* $\sqrt[4]{2}, i$.)

2. Sejam $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$ as raízes de $x^3 + x^2 - x + 1$. Determine $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

3. Uma extensão de corpos é chamada *abeliana* (resp. *cíclica*) se é galoisiana e seu grupo de Galois é abeliano (resp. cíclico).

Decida se as extensões abaixo são abelianas, cíclicas ou nem um nem outro.

(a) $\mathbb{Q}(\omega) \mid \mathbb{Q}$, onde $\omega = e^{2\pi i/9}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \omega) \mid \mathbb{Q}$, onde $\omega = e^{2\pi i/3}$.

4. Seja $n > 2$ um inteiro e $\omega = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.

(a) Mostre que $\mathbb{Q}(\omega + \omega^{-1}) = \mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{R}$ e que $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}(\omega + \omega^{-1})] = 2$.

(b) Para $n = 6, 8$, determine o polinômio mínimo de ω_n sobre $\mathbb{Q}$.

(c) Para quais dos números n acima o grupo de Galois de $\mathbb{Q}(\omega_n) \supset \mathbb{Q}$ é cíclico?

(d) Do Exercício 11 da Lista 2: se p é primo, então o grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^*$ é cíclico. Utilizando isto, mostre que $\mathbb{Q}(\omega_p) \supset \mathbb{Q}$ é cíclica de ordem $p - 1$.

5. Seja $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

(a) Mostre que $F \supset \mathbb{Q}$ é galosiana e mostre que $[F : \mathbb{Q}] = 8$.

(b) Determine seu grupo de Galois sabendo que é uma extensão abeliana (utilize a classificação dos grupos de ordem 8).

6. Determine o grupo de Galois de $x^4 - 5$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

7. Seja $F \supset k$ uma extensão galoisiana de ordem $2p$, onde p é um primo ímpar. Mostre que existe um corpo intermediário E tal que $E \supset k$ é normal e de grau p (dica: Sylow e 2o. Teorema Fundamental).