Lista 1

1. Dadas as permutações $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ em S_5, calcule:

(a) $\sigma \circ \tau$.

(b) $\tau \circ \sigma$.

(c) $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$.

2. Determine a paridade das permutações σ e τ do exercício anterior.

3. Seja x um número real e considere os vetores

$$v_1 = (x, 4, 1),\ v_2 = (x, 2x, -x) \text{ e } v_3 = (1, 7, 1).$$

Usando determinantes, determine os valores de x para os quais estes três vetores são linearmente independentes.

4. Seja a matriz A definida como

$$\begin{pmatrix} 4x+3 & 2 & 1 & 1 \\ x & 3 & 4 & 2 \\ 2x-1 & 1 & 0 & 3 \\ -x & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ache o valor de x tal que $\det(A) = 0$.

5. Ache a forma geral das matrizes $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A = \mathrm{Adj}(A)$, onde $\mathrm{Adj}(A)$ é a adjunta clássica de A.

6. Prove que se a matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ possui uma linha nula, então $\det(A) = 0$.

7. Ache os valores de t para os quais o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{pmatrix}$$

é igual a zero.

8. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

utilizando transformações elementares (isto é, escalonando-a) até obter uma matriz triangular.

9. Idem para

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Resolva pela regra de Cramer os seguintes sistemas lineares

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad ; \qquad \begin{aligned} -2x - y + 2w &= 1 \\ 3x + y + 2z - 2w &= 0 \\ -4x - y + 2z + 3w &= 2 \\ 3x + y - z - 2w &= -1 \end{aligned}$$

11. Calcule a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

de duas maneiras: (a) pelo método da adjunta clássica; (b) pelo método que você aprendeu em Álgebra Linear I.

12. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o determinante da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ 1 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \\ 1 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \end{pmatrix}$$

é zero.