Lista 2

1. A função $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$b(u,v) := \frac{1}{9}u_1v_1 - \frac{1}{4}u_2v_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$? Justifique sua resposta.

2. Considere a função $g\colon P \times P \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) := \int_0^1 u(x)v(x)dx,$$

onde P é o espaço dos polinomios com coeficientes reais. Esta função define um produto interno em P?

3. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$.

(a) Prove que

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

(b) Esboce o círculo unitário no sistema de coordenadas xy em $\mathbb{R}^2$, usando a distância obtida a partir do produto interno em (a).

(c) Esboce o círculo unitário no sistema de coordenadas xy em $\mathbb{R}^2$, usando a distância obtida a partir do produto interno usual.

(d) Há alguma diferença entre os círculos obtidos em (b) e (c)?

4. (Identidade do paralelogramo) Dados vetores u e v em um espaço com produto interno, mostre que

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \qquad .$$

5. (Identidade de Parseval) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base uma base ortonormal de um espaço vetorial V. Dados $u, v \in V$ quaisquer, prove que

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle\langle v_i, v\rangle \qquad .$$

6. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço com produto interno V. Prove que o vetor nulo de V é o único vetor de V que é ortogonal a todos os vetores da base.

7. Seja V um espaço com produto interno. Prove que se u e v são vetores ortogonais de V tais que $|u| = |v| = 1$, então $|u - v| = \sqrt{2}$.

8. (Generalização do Teorema de Pitágoras) Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores em um espaço com produto interno. Prove que

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_n|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2 .$$

9. Seja V um espaço com produto interno. A *distância* entre dois vetores u e v em V é definida como

$$d(u, v) := |u - v| .$$

Prove que

(a) $d(u, v) \geq 0$;

(b) $d(u, v) = 0$ se, e somente se $u = v$;

(c) $d(u, v) = d(v, u)$;

(d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

10. Seja V um espaço com produto interno, e sejam u e v vetores em V. Prove que

$$u = v \iff \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \forall w \in V.$$

11. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica em $\mathbb{R}^2$. Ache um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle e_1, e_2 \rangle = 2$.

12. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

$$(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

para quaisquer números reais a, b e θ.

13. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno canônico. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado por todos os vetores que são ortogonais a $(1, 0, 1, -1)$ e $(2, 3, -1, 2)$. Encontre uma base para W.