Lista 3

Abaixo, V denota um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno.

1. Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

da seguinte maneira: se ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 são as linhas, faça $\ell_3 \mapsto \ell_3 - a \cdot \ell_2$ e em seguida $\ell_2 \mapsto \ell_2 - a \cdot \ell_1$. Com isso reduzimos o cálculo para uma matriz 2×2; agora basta observar que que podemos colocar $(b-a)$ e $(c-a)$ em evidência nas colunas.

2. Generalizando: lançando mão da mesma estratégia e usando indução, mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_r^2 \\ & & \vdots & \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \dots & a_r^{r-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_r-a_{r-1})$$

Esta importante identidade é conhecida como o *determinante de Vandermonde*.

3. Seja W um espaço vetorial qualquer. Mostre que se $T\colon W \to W$ satisfaz $T^2 = T$ (isto é, $T(T(w)) = T(w)$ para todo $w \in W$), então $W = \text{Núcleo}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

4. Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Prove que:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

5. Seja $C = C([-1,1];\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas reais no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Se W é o subespaço de C das funções ímpares, ache o complemento ortogonal de W (recorde que uma função é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio).

6. Ache a matriz, na base canônica, para a composição de uma rotação de 90 graus, seguida de uma reflexão em torno da reta $y = x$, em $\mathbb{R}^2$.

7. Determine a inversa do operador em $\mathbb{R}^3$ dado pela reflexão em torno do plano xy.

8. Sejam $T \in L(\mathbb{R}^2)$ a reflexão em torno da reta $y = x$ e $S \in L(\mathbb{R}^2)$ a projeção ortogonal sobre o eixo y. Mostre que $S \circ T \neq T \circ S$.

9. Para duas bases ortonormais quaisquer $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de um espaço V, mostre que existe um operador ortogonal $T\colon V \to V$ tal que $Tu_i = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Se as bases são dadas pelos vetores

$$u_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad u_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \qquad \text{e}$$

$$v_1 = \frac{1}{7}(2, 3, 6), \quad v_2 = \frac{1}{7}(6, 2, -3), \quad v_3 = (3, -6, 2) \qquad \text{em } \mathbb{R}^3$$

encontre a matriz de T na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

10. Prove que a adjunta do operador $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $Tv = \langle v, a\rangle b$ é $T^*v = \langle v, b\rangle a$.

11. Mostre que uma transformação $T\colon V \to V$ é ortogonal se e somente se $T^*T = \mathrm{Id}$.

12. Dada uma transformação linear $T\colon V \to V$, mostre que

$$\text{Núcleo}(T) = \text{Im}(T^*)^\perp \qquad \text{e} \qquad \text{Im}(T) = \text{Núcleo}(T^*)^\perp$$

13. Dado o operador $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 2y - z, -2x + 3y + 2z)$, obtenha bases para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: $\text{Im}(T), \text{Núcleo}(T), \text{Im}(T^*)$ e $\text{Núcleo}(T^*)$.

14. Considere a base $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ dada por $u = (1, 1, 1), v = (1, 2, 3)$ e $w = (1, -2, 1)$. Determine as matrizes (na base canônica) dos funcionais lineares $u^*, v^*, w^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que formam a base dual de $\{u, v, w\}$.