

LISTA 4

1. Determine os autovalores e bases para os autoespaços das seguintes matrizes

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Seja T um operador linear definido sobre um espaço vetorial V . Mostre que o autoespaço associado a um autovalor λ de T coincide com núcleo do operador $T - \lambda \cdot \text{Id}$.
3. Calcule o polinômio característico, os autovalores e bases para os autoespaços do operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (-2y + 3z, x - y + z, z)$.
4. Encontre uma matriz 3×3 com autovalores $0, 1$ e -1 e respectivos autovetores $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$.
5. Uma matriz quadrada é invertível se e só se 0 não é raiz do seu polinômio característico.
6. Matrizes semelhantes têm os mesmos polinômios característicos.
7. Se o operador A é diagonalizável e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são seus autovalores distintos dois a dois, prove que o polinômio mínimo de A é

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k).$$

8. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, encontre um polinômio que tenha a matriz como raiz.
9. Seja A uma matriz triangular, não-diagonal. Se todos os elementos da diagonal de A forem iguais, A não é diagonalizável? Justifique sua resposta.
10. Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.
11. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcule A^{100} , A^{1321} e A^{-100} .
12. Para quais valores de c as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são diagonalizáveis?
13. Se uma matriz A é diagonalizável e invertível, então A^{-1} é diagonalizável? Justifique.

14. Seja A uma matriz simétrica e λ_1 e λ_2 autovalores distintos de A . Se v_1 e v_2 são autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, prove que v_1 e v_2 são ortogonais.

15. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Mostre que $p(t) = (t - \alpha)^6$ é o polinômio característico e o polinômio mínimo de A .

16. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

têm o mesmo polinômio mínimo, embora tenham polinômios característicos diferentes.