Lista 5

1. Prove que as seguintes condições sobre um operador P são equivalentes:

(a) $P = T^2$, para algum operador autoadjunto T.

(b) $P = S^*S$, para algum operador S.

(c) P é autoadjunto e $\langle P(u), u\rangle \geq 0$, para todo $u \in V$.

2. Seja $T\colon V \to V$ um operador definido em um espaço de dimensão finita. Seja W um subespaço invariante por T. Mostre que se T é invertível, então $T(W) = W$.

3. Se A é uma matriz real simétrica, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $cI + A$ é positiva (sugestão: Teorema Espectral).

4. O produto de dois operadores positivos é positivo se, e somente se, eles comutam.

5. Prove que se uma matriz ortogonal é triangular, então é diagonal.

6. Se um operador linear é positivo e ortogonal, então ele coincide com a identidade.

7. Quais das matrizes abaixo são positivas?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Dê um exemplo de uma matriz quadrada cujos menores principais sejam todos positivos, mas que não seja uma matriz positiva.

9. Tome $V = \mathbb{C}$ como espaço vetorial real.

(a) Prove que $\langle \alpha, \beta\rangle := \mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta})$ define um produto interno em V.

(b) Fixe $\theta \in V$ e considere M_θ o operador linear em V definido por $M_\theta(\alpha) := \theta\alpha$. Prove que $(M_\theta)^* = M_{\overline{\theta}}$.

(c) Para quais números complexos θ, M_θ é autoadjunto?

(d) Para quais números complexos θ, M_θ é positivo?

10. Tome $V = \mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre os complexos, munido do produto interno usual (ou seja, $\langle u, v\rangle = u \cdot \overline{v}$). Seja T um operador autoadjunto em V. Prove que:

(a) $|u + iTu| = |u - iTu|$ para todo $u \in V$.

(b) $u + iTu = v + iTv$ se, e somente se, $u = v$.

(c) $I - iT$ é não-singular.