UFF - INSTITUTO DE MATEMÁTICA 28 agosto 2014.
ANÁLISE I – 2014/B1

LISTA 1

**1.** Por indução, prove que:

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(b) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, para $x \neq 1$.

(c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall x \geq -1$ (desigualdade de Bernoulli).

(d) Se $n \geq 2$, então $1! + 2! + \cdots + (n - 1)! < n!$.

**2.** Seja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $f(a) = -2a - 1$, se $a < 0$ e $f(a) = 2a + 2$ se $a \geq 0$. Prove que $f$ é uma bijeção.

**3.** Os conjuntos abaixo são enumeráveis? Justifique.

(a) A=$\{\sqrt{p} \mid p \text{ primo}\}$

(b) B=$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$

(c) C=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

(d) D=$\{a/b \in \mathbb{Q} \mid b \neq 7\}$

(e) E={retas do plano passando pela origem}

(f) Os números irracionais.

**4.** Prove que se $X$ é não-enumerável e $X \subseteq Y$, então $Y$ não é enumerável.

**5.** Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados superiormente.

(a) É verdade que $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$?

(b) Se $X \cap Y \neq \emptyset$, é verdade que $\sup(X \cap Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$?

(Se sua resposta é “sim”, demonstre; caso seja “não”, apresente um contra-exemplo).

**6.** Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ uma cota superior para $X$. Mostre que $c = \sup X$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x \leq c$. Enuncie e resolva o análogo para $\inf$.

**7.** (Desigualdade entre médias geométrica e aritmética)

(a) Se $a, b \in \mathbb{R}$ são não negativos, então $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(b) Se $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, então

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

e vale a igualdade se e somente se $a_1 = \cdots = a_n$.

**8.** Sejam $A \subseteq B$ conjuntos limitados e não-vazios de números reais. Mostre que $\inf B \leq \inf A$ e $\sup A \leq \sup B$. Dê um exemplo onde $A \subsetneq B$ mas as igualdades são válidas.

**9.** Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$:

(a) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

(b) $|x - y| < \varepsilon \Longrightarrow |x| < |y| + \varepsilon$;

(c) $|x| \leq |x + y| + |y|$.