LISTA 2

1. Calcule o supremo e o ínfimo dos seguintes conjuntos:
(a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 10\}$
(b) $\{n/(m+n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
(c) $\{n/(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$
(d) $\{n/m \mid m, n \in \mathbb{N}$ com $m+n \leq 10\}$
(e) $\{\frac{q^n-1}{q-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ onde $0 < q < 1$.

2. Mostre que se $\sup A < \sup B$, então existe $b \in B$ tal que b é uma cota superior de A.

3. **V** ou **F**? Justifique brevemente sua resposta, apresentando um contra-exemplo ou uma prova breve, conforme o caso.

(a) Se a é uma cota superior de A e $a \in A$, então a é o supremo de A.
(b) Se $\lim x_n = a$, então $\lim |x_n| = |a|$;
(c) Se $\lim |x_n| = |a|$, então $\lim x_n = a$;
(d) Se $(x_{2n})_n$ e $(x_{2n+1})_n$ convergem para a, então $(x_n)_n$ também converge para a;
(e) Se $\lim(x_n) = 0$ e $(y_n)_n$ é uma seqüência qualquer, então $\lim(x_n y_n) = 0$;
(f) Toda seqüência possui uma subseqüência convergente.

4. Prove que qualquer número real é limite de alguma seqüência de números racionais. Ainda seria válido se considerássemos seqüências de números irracionais?

5. Mostre que cada uma das seqüências abaixo converge e calcule seus limites.

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad b_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad c_n = \frac{2n+1}{3n},$$

$$d_n = \sqrt[n]{a}\ (a \in \mathbb{R}_{>0}) \quad \text{e} \quad e_n = \frac{12n^2 - 15n + 7}{7n^2 - 15n + 12}.$$

6. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$.
(b) Vale a igualdade se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lambda y_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

(Sugestão: Note que $f(\lambda) = \sum (x_i + \lambda y_i)^2 \geq 0$ para qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$f(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C, \qquad \text{com } A = \sum y_i^2, B = 2\sum x_i y_i, C = \sum x_i^2.)$$