

LISTA 3

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado inferiormente. Defina $Y = \{-x \mid x \in X\}$. Mostre que Y é limitado superiormente e que $\inf X = -\sup Y$.
2. Mostre que se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para n suficientemente grande, então $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$.
3. Estude a convergência das séries $\sum a_n$ com termo geral abaixo. Justifique.
(a) $a_n = \frac{a}{n!}$ ($a \in \mathbb{R}$). (b) $a_n = \frac{1}{\log n}$. (c) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
(d) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n!)}$ (e) $a_n = \frac{1}{n \log n}$. (f) $a_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$.
4. Prove que as séries

$$S = \sum_{n \geq 2} \frac{\sin(n)}{n^2 - 1}, \quad T = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{4n + 2} \quad (|a| < 1)$$

convergem absolutamente.

5. Mostre que as séries $\sum nr^n$ e $\sum n(n-1)r^n$ convergem se e somente se $|r| < 1$.
6. Seja $\sum a_n$ uma série absolutamente convergente. Prove que $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.
7. Prove que a série $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^5} + \dots$ é convergente.
8. Seja $S = \sum a_n$ uma série com termo geral $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que S converge se e somente se a sua seqüência (s_n) de somas parciais é limitada.
9. Mostre que se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum a_n \sin(nx), \quad \sum a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.