LISTA 4

1. Para cada um dos conjuntos abaixo, encontre o seu interior, o seu fecho e o conjunto dos pontos de acumulação.

(a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (b) $\mathbb{Q} \cap [1,3]$ (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\}$ (e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (f) $\mathbb{Z}$.

2. Dê exemplos de conjuntos X e Y tais que:

(a) $\mathrm{int}(X \cup Y) \neq (\mathrm{int}\, X) \cup (\mathrm{int}\, Y)$.
(b) $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.
(c) $X' \neq \overline{X}$ e $Y' = \overline{Y}$.
(d) X é fechado, ilimitado e todos os seus pontos são isolados.

Definição: Um conjunto X é *denso* em um conjunto Y se $\overline{X} \supseteq Y$, ou seja, se todo ponto de Y é limite de alguma sequência de pontos de X.

3. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são as falsas. No primeiro caso, apresente um argumento sucinto; no segundo, exiba um contra-exemplo.

i. Sejam $A, F \subset \mathbb{R}$ não vazios, diferentes de $\mathbb{R}$, com A aberto e F fechado.
(a) $A \cup F$ é fechado (b) $A \cap F$ é fechado (c) $A \cap F$ é aberto
(d) $A \cup F$ é aberto (e) $F \setminus A$ é aberto (f) $A \setminus F$ é aberto

ii. Todo aberto não vazio é uma união de intervalos abertos.
iii. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.
iv. X é denso em $\overline{X}$.
v. Se X e Y são densos em $\mathbb{R}$, então $X \cap Y$ é denso em $\mathbb{R}$.
vi. Se X e Y são abertos densos em $\mathbb{R}$, então $X \cap Y$ é um aberto denso em $\mathbb{R}$.

4. Quais dos conjuntos abaixo são compactos? Justifique.

(a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (b) $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$
(d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ (e) $\{\frac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (f) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [4,7]$.

5. Dê um exemplo de um conjunto compacto, infinito e de interior vazio.

6. Prove que se X e Y são compactos, então $X \cap Y$ e $X \cup Y$ são compactos.