LISTA 5

1. Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}, g\colon Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$, $b \in Y' \cap Y$. Prove que se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to b} g(y) = c$$

então $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, desde que $c = g(b)$ ou que $x \neq a$ implique $f(x) \neq b$.

2. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se x é racional; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

3. Prove que $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência descrescente de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$. Enuncie e demonstre um resultado similar para $\lim_{x\to a-} f(x)$.

4. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante, ou seja, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Suponha adicionalmente que $a_n > 0$. Mostre que se n é par, então $\lim_{x\to -\infty} p(x) = \lim_{x\to +\infty} p(x) = +\infty$; se n é ímpar, mostre que $\lim_{x\to -\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} p(x) = +\infty$. Enuncie e demonstre um resultado similar para o caso em que $a_n < 0$.

5. Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in X$. Prove que se $f(a) > g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > g(x).$$

6. Para cada conjunto A abaixo, construa uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em cada ponto de A e contínua em $\mathbb{R} \setminus A$.

(a) $A = \mathbb{Z}$.

(b) $A = (0, 1)$.

(c) $A = [0, 1]$.

7. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Prove que se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in X$.

8. Mostre que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e só se para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ vale $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

9. Seja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) \leq 0$ e $f(1) \geq 1$. Mostre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

10. Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *periódica* se existe $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo.

11. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $U \subset \mathbb{R}$ um aberto. Mostre que $f^{-1}(U)$ é aberto.

12. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $X \subset \mathbb{R}$ um fechado. Mostre que $f^{-1}(X)$ é fechado.

13. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e X um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então f é a função nula.

(b) Mostre que se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, então $f = g$.

14. Mostre que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Mostre que f é uniformemente contínua mas não é de Lipschitz.

15. Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Mostre que $h\colon X \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é uniformemente contínua.