UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE — 20 NOVEMBRO 2013
INSTITUTO DE MATEMÁTICA — PROF.: NIVALDO.
ANÁLISE II

LISTA 2

1. Prove: $X, Y \subset \mathbb{R}$ tem medida nula $\implies$ $X \cup Y$ e $X \cap Y$ também tem medida nula.

2. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de conjuntos de medida nula. Mostre que $X = \cup_n X_n$ também possui medida nula.

3. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é de Lipschitz e $X \subseteq [a,b]$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

4. Em cada uma das seguintes afirmações abaixo justifique em caso verdadeiro e dê um contra-exemplo em caso falso.

(a) Se $|f|$ é integrável, então f é integrável.

(b) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é tal que suas somas inferiores e superiores coincidem com respeito a qualquer partição do intervalo $[a,b]$, então f é constante em $[a,b]$.

(c) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável.

5. Se $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 2$ se $x \neq 2$ e $f(2) = 1$, mostre usando o critério de Cauchy que f é integrável e que a integral em $[1,3]$ vale 4.

6. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\int_a^b f(x)dx = 0$, então existe c em $[a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

7. Dê um exemplo de uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ para a qual não existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável com $f(x) \geq 0$ para todo x. Prove que $\int_a^b f(t)dt = 0$ se e somente se existe um subconjunto Y denso em $[a,b]$ tal que $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$.

9. Prove que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é lipschitziana.

10. Seja $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$ para $x > 0$. Prove que a função F é constante.

11. Dada a integral imprópria $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^m}$ com $b > a$, analise a sua convergência quando:

(a) $0 < m < 1$ (b) $m = 1$ (c) $m > 1$.

Se a integral for convergente, calcule seu valor.

12. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada $x \in [a,b]$, defina $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) \geq 0$ e $f_+(x) = 0$ se $f(x) < 0$; e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) \leq 0$ e $f_-(x) = 0$ se $f(x) > 0$. Prove:

(a) $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$.

(b) Se f é integrável, então f_+ e f_- são integráveis. Vale a recíproca?

13. Considere as integrais impróprias:

$$\text{(a)} \int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} \qquad\qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x^5}{x^6+1}dx.$$

Decida se são convergentes e calcule seu valor, em caso afirmativo.

14. (a) Mostre que se f é limitada em $[a,\infty)$, integrável em qualquer intervalo $[a,r]$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ converge absolutamente, então $\int_a^\infty (f\cdot g)(x)dx$ converge.

(b) Usando o item anterior, mostre que $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ converge.

15. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_x^b f(t)dt$.

(a) Prove que $G' = -f$ em cada ponto onde f é contínua.

(b) Determine $h'(x)$, onde $h(x) = G(x^2) - G(x^3)$.

16. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e tal que $f \geq 0$. Mostre que se $\int_a^b f(t)dt = 0$ e f é contínua em um ponto $c \in (a,b)$, então $f(c) = 0$.

17. Prove que a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ é descrecente e limitada e logo converge. Seu limite é chamado a constante de *Euler-Mascheroni* e seu valor é aproximadamente $\gamma = 0,577\ldots$.

18. Usando o critério de Cauchy, prove que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é integrável.