Lista 1

1. A *fronteira* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é definida como $\partial X := \overline{X} \cap \overline{X^c}$.

(a) $p \in \partial X$ se e só se toda vizinhança de p contém pontos de X e de X^c.

(b) $\mathbb{R}^n = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(X^c)$ é uma partição de $\mathbb{R}^n$.

2. Determine o interior, fecho e fronteira dos seguintes conjuntos:
(a) $B[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ (b) $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ (c) $\mathbb{Q}^n$

3. Quais os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com fronteira vazia?

4. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $p \notin X$, então existe $c > 0$ tal que $|x - p| \geq c$ para todo $x \in X$.

5. Mostre que as projeções $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x) = x_i$, são aplicações abertas.

6. Seja $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ contínua, com $X \subset \mathbb{R}^m$. Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $f^{-1}(V) = U \cap X$. Vale a afirmação análoga trocando-se "aberto" por "fechado".

7. Seja $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

(a) Mostre que existe $c > 0$ tal que $|T \cdot h| \leq c\,|h|$ para todo $h \in \mathbb{R}^m$.

(b) Usando (a), prove que toda transformação linear é contínua.

8. Seja $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ o círculo unitário tome e $p = (0,1) \in S^1$. Mostre que a projeção estereográfica $\phi \colon S^1 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x,y) = \frac{x}{1-y}$ é um homeomorfismo, cuja inversa é $\varphi(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$.

9. Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ é conexo. Use isso para mostrar que a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, também é um conjunto conexo.

10. A esfera unitária S^{n-1}, para $n \geq 2$, é conexa por caminhos?

11. Dê um exemplo de um aberto denso em $\mathbb{R}^2$ com exatamente 5 componentes conexas.

12. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se $p \in \text{int}(X)$ e $q \in \text{int}(X^c)$, então todo caminho que liga p a q intersecta a fronteira de X.

13. Considere um par de conjuntos $C \subset U$ de $\mathbb{R}^n$ com C compacto e U aberto. Mostre que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in C$ a bola aberta $B(x,r)$ está contida em U.