Lista 2

1. Calcule as derivadas direcionais da função f no ponto a e na direção do vetor v:

(a) $f(x,y) = xy$, $a = (1,3)$, $v = (2,-1)$.

(b) $f(x,y) = xe^{xy}$, $a = (1,-1)$, $v = (1,1)$.

(c) $f(x,y,z) = (x/y)^z$, $a = (1,1,1)$, $v = (2,1,-1)$.

2. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que

(a) Existem $\partial f/\partial x(x,y)$ e $\partial f/\partial y(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) f não é contínua em $(0,0)$.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(0,0,0) = (1,2)$ e $f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (x + 2y + 1, 3xy)$. Calcule $(g \circ f)'(0,0)$.

4. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{2x_1+x_2} \\ 3x_2 - \cos x_1 \\ x_1^2 + x_2 + 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} 3y_1 + 2y_2 + y_3^2 \\ y_1^2 - y_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tome $F(x_1,x_2) := (g \circ f)(x_1,x_2)$. Calcule $F'(0,0)$ sem calcular $F(x_1,x_2)$ explicitamente.

(b) Para $G(y_1,y_2,y_3) := (f \circ g)(y_1,y_2,y_3)$, calcule $G'(0,0,0)$.

5. Sejam $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciáveis e tome $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = f(x,y,g(x,y))$.

(a) Calcule F' em termos das derivadas parciais de f e g.

(b) Se $F(x,y) = 0$ para todo (x,y), procure as derivadas $D_1 g$ e $D_2 g$ em termos das derivadas parciais de f.

6. Determine os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é localmente invertível e calcular a derivada de f^{-1} nos pontos indicados:

(a) $f(x, y, z) = (z \operatorname{sen} y \cos x, z \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x, z \cos y)$ no ponto $f(\pi/4, \pi/6, 4)$.

(b) $f(x, y, z) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y, z)$ no ponto $f(2, \pi/3, 3)$.

7. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = |x|^2 \cdot x$. Mostre que f é de classe C^∞ e que é injetora de $B(0, 1)$ em si mesma, embora sua inversa não seja diferenciável na origem.