Lista 3

1. Mostre que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = |xy|$ é diferenciável na origem mas não é de classe C^1 em qualquer vizinhança da origem.

2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Calcule Df e $\det Df$ em um ponto qualquer (r,θ).

3. Mostre que a função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

não é diferenciável na origem (derivadas parciais...).

4. Defina $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ para todo x e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y.

(b) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

5. Determine os pontos em $\mathbb{R}^3$ tais que a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é localmente invertível e calcule a derivada de f^{-1} nos pontos indicados.

(a) $f(x,y,z) = (z\cos x\,\mathrm{sen}\,y, z\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y, z\cos y)$ no ponto $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 4)$.

(b) $f(x,y,z) = (z\cos y, x\,\mathrm{sen}\,y, z)$ no ponto $f(2, \frac{\pi}{3}, 3)$.

6. Mostre que $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = |x|^2 \cdot x$ é de classe C^∞, é injetora na bola $B(0,1)$ em si mesma e, porém, sua inversa não diferenciável na origem.

7. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Mostre que f é injetora no conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

(b) Se g é a inversa de f em A, calcule $g'(0,1)$.

8. Dadas $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3) \quad \text{e} \quad g(x,y) = (2ye^{2x}, xe^y)$$

mostre que existem vizinhanças U do ponto $(0,1)$ e V do ponto $(2,0)$ tais que a função $g\colon U \to V$ é injetora. Em seguida, calcule $(f \circ g^{-1})'(2,0)$.

9. Use a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

para mostrar que a hipótese da continuidade da derivada não pode ser suprimida no teorema da função inversa.