LISTA 4

1. Determine os pontos críticos da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$. Idem para a função $g(x,y) = x^3 - y^3 - x + y$.

2. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2 - 1)^2$ e calcule as matrizes hessianas correspondentes.

3. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável em um aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$. Se para todo ponto a da fronteira de U tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, prove que existe em U pelo menos um ponto crítico de f.

4. Dados $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$, determine o ponto em que a função $f(x) = \sum_{i=1}^{k} |x - p_i|^2$ assume o seu valor mínimo.

5. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, com coordenadas (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$. Suponha que $f(3,-1,2) = (0,0)$ e que $f'(3,-1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Mostre que existe uma função $g\colon I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 definida em um intervalo $I = (3-\delta, 3+\delta)$ para algum $\delta > 0$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para $x \in I$ e $g(3) = (-1,2)$.

(b) Calcule $g'(3)$.

6. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y + \operatorname{sen} z$. Prove que, em uma vizinhança de 0, a equação $f(x,y,z) = 0$ define z como função de classe C^∞ das variáveis x, y. Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \times [0,1) \to \mathbb{R}$ a função contínua dada por $f(x,y) = (x^2+y^2)(ye^{|x|} - 1)$. Prove que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y = g(x) \in [0,1)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ mas a função $g\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ não é contínua.

8. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(6,2) = 0$ e $\operatorname{grad} f(6,2) = (2,3)$. Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = f(x + 2y + 3z - 7, x^3 + y^2 - z^2)$.

(a) Mostrar que a equação $g(x,y,z) = 0$ define x como uma função $h(y,z)$ de classe C^1 em uma vizinhança U do ponto $(-2,3,1)$.

(b) Calcule $h'(-2,3)$.

9. Prove que toda submersão $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação *aberta*, isto é, $A \subset U$ aberto $\implies f(A) \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

10. Seja $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Prove que f é uma submersão se e somente se para cada ponto $x \in U$ os vetores $\operatorname{grad} f_1(x), \ldots, \operatorname{grad} f_n(x)$ são linearmente independentes.