22, setembro, 2011.
Prof: Nivaldo.

1A. PROVA

1. *(2,0)* Prove que cada uma das funções a seguir é inteira e calcule sua derivada.

(a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

(b) $g(z) = (z^2 - 2)\cos z$.

2. *(1,0)* Expresse os seguintes números complexos na forma $x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{Log}(1+i)$ (b) $(\sqrt{3}+i)^4$

3. *(2,5)* **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova sucinta ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) A função $f(z) = z - \bar{z}$ não é holomorfa em nenhum ponto do plano complexo.

(b) Se X e Y são compactos, então $X \cap Y$ é compacto.

(c) Se uma sequência (z_n) em $\mathbb{C}$ é tal que $(\exp(z_n))$ converge, então (z_n) converge.

4. *(2,0)* Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

satisfaz as equações de Cauchy-Riemann na origem $z = 0$, mas não é diferenciável na origem.

5. *(2,5)* Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Escreva $f = u + iv$, com $u, v\colon U \to \mathbb{R}$. Mostre que se $u(z) - v(z) = 0$ para todo $z \in U$, então f é constante.

Boa prova!