UFF – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
FUNÇÕES COMPLEXAS 2011/2

13 dezembro 2011.
Prof: Nivaldo.

VR

1. *(2,0)* **V** ou **F**? Justifique sua resposta, apresentando uma prova sucinta ou um contra-exemplo, conforme o caso.

(a) A função $f(z) = |z|^2$ não é holomorfa em nenhum ponto do plano complexo.

(b) A função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada for $f(z) = z^3$ é uma função sobrejetiva, mas não injetiva.

(c) Uma função inteira que se anula em um conjunto infinito de pontos deve ser a função nula.

2. *(2,0)* Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Mostre que se a imagem de f está contida em $\mathbb{R}$ (i.e., $f(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in U$), então f é constante.

3. *(2,0)* Calcule as integrais:

(a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{z^2}\, dz$ (b) $I_2 = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^4}{z^2 - 2}\, dz.$

4. (a) *(1,0)* Mostre que $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z}\, dz = 2\pi i$, para qualquer constante real k.

(b) *(1,0)* Use o resultado do item (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos t} \cos(k \operatorname{sen} t) dt = \pi.$$

5. *(2,0)* Seja $\Delta = \Delta(0,1)$ e $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e holomorfa em Δ. Suponha que $|f(z)| = 1$ sempre que $|z| = 1$ e que o único zero de f é a origem. Mostre que $f(z) = cz^m$ onde m é um inteiro positivo e c é uma constante com $|c| = 1$. (Palavras-chave: zeros isolados, teorema do módulo máximo.)

Boa prova!