VS

(Resolva apenas cinco entre as questões abaixo)

1. *(2,0)* Prove que cada uma das funções a seguir é inteira e calcule sua derivada.

(a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

(b) $g(z) = (z^2 - 2)\cos z$.

2. *(2,0)* Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $f' - \lambda f = 0$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}$. Prove que f é da forma $f(z) = ce^{\lambda z}$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}$.

3. (a) *(0,5)* Enuncie o Teorema Fundamental da Álgebra.

(b) *(1,5)* Prove que toda função polinomial não constante $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetora.

4. *(2,0)* Calcule as integrais:

(a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\, dz$ (b) $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1}\, dz$.

5. *(2,0)* Determine a expansão de Laurent da função $f(z) = \frac{z^2}{(z-4)(z+2)}$ no anel $\Delta(0, 2, 4)$.

6. *(2,0)* Sejam f, g duas funções inteiras. Prove que se existe um aberto U não-vazio tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U$, então $f = g$.

7. *(2,0)* Sejam $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ tais que f é holomorfa no aberto U e g possui um pólo simples em $z_0 \in U$. Mostre que

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f \cdot g) = \operatorname{Res}_{z_0}(g) \cdot f(z_0).$$

Boa prova!