Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 1

Exercício 1: Calcule as seguintes integrais duplas:

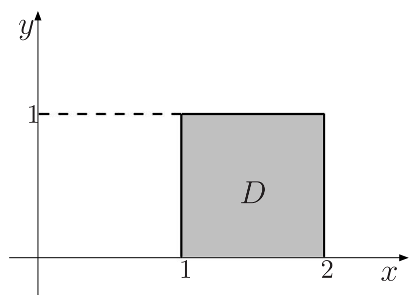
a) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+y^2}\, dxdy$, sendo $D = [1,2] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D x\; dxdy$ na região D compreendida entre as curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

c) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\, dxdy$, onde D é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ e $x = 2$.

Solução:

a) O esboço de D está representado na figura que se segue.



Como D é um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados, temos $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$. Pelo teorema de Fubini, o valor da integral dupla pode ser obtido por meio de qualquer uma das seguintes integrais iteradas:

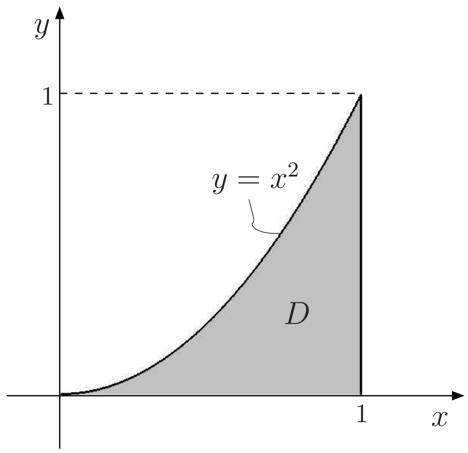
$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{x}{1+y^2}\, dxdy \quad \text{ou} \quad \int_1^2 \int_0^1 \frac{x}{1+y^2}\, dydx\,.$$

Usando a primeira delas, temos,

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\, dxdy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{x}{1+y^2}\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \int_1^2 x\; dxdy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 dy = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{3}{2} \big[\operatorname{arctg} y\big]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{3\pi}{8}\,.$$

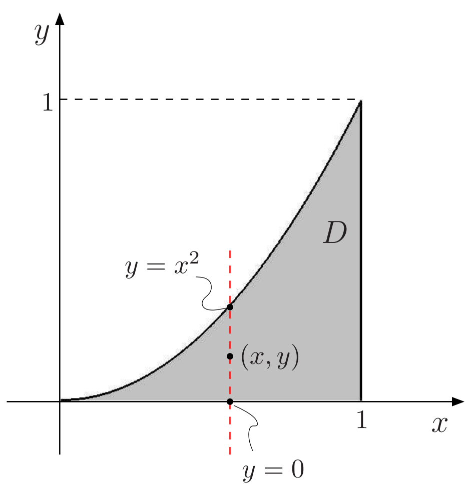


b) O esboço de D está representado na figura que se segue.

Como D é diferente de um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados, devemos enquadrar D como uma região do tipo I ou do tipo II.

Solução 1:

Vamos descrever D como tipo I. Seja $(x, y) \in D$. Então traçamos uma reta vertical por (x, y).



Vemos que esta reta vertical corta a fronteira inferior de D no eixo x, onde $y = 0$, e a fronteira superior de D na parábola $y = x^2$. Então, $0 \leq y \leq x^2$. Projetando a região D sobre o eixo x, encontramos o intervalo fechado $[0, 1]$. Então, $0 \leq x \leq 1$. Portanto $D = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x^2\}$.

Temos, então,

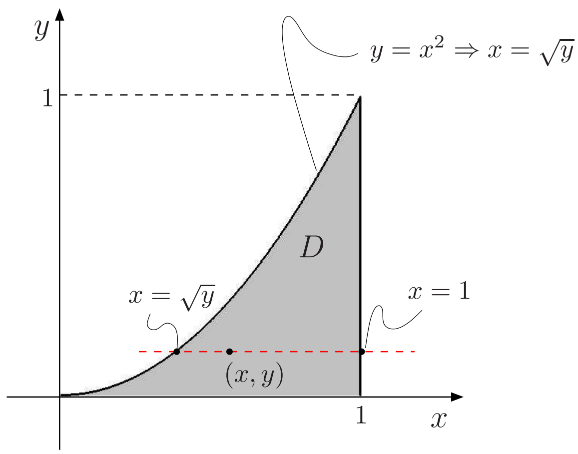
$$\iint\limits_D x\ dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\ dydx = \int_0^1 x \int_0^{x^2} dydx = \int_0^1 x\big[y\big]_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\,.$$

Observação: A integral do lado direito de uma integral dupla é uma integral iterada, cuja primeira integral definida indicada deverá ter limites de integração constantes, pois o valor da integral dupla será um número real.

Solução 2

Vamos descrever D como tipo II. Então traçamos uma reta horizontal por $(x, y) \in D$.



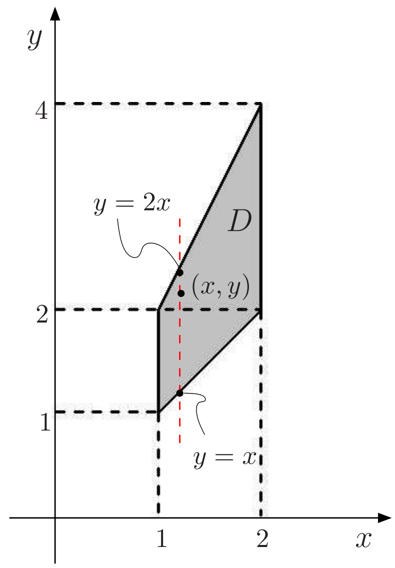
Vemos que esta reta horizontal corta a fronteira da esquerda na parábola $x = \sqrt{y}$ e a fronteira da direita na reta $x = 1$. Então, $\sqrt{y} \leq x \leq 1$. Projetando D sobre o eixo y, temos o intervalo $[0, 1]$. Logo, $0 \leq y \leq 1$. Então, $D = \{(x, y);\ 0 \leq y \leq 1\,,\ \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$.

Portanto,

$$\iint\limits_D x\ dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x\ dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\ dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.$$

c) O esboço de D está representado na figura que se segue.



Na figura vemos que a fronteira inferior é a reta $y = x$ e a fronteira superior é a reta $y = 2x$. Então $x \leq y \leq 2x$. Como a projeção de D sobre o eixo x é o intervalo fechado $[1, 2]$, temos $1 \leq x \leq 2$. Temos, então, $D = \{(x, y);\ 1 \leq x \leq 2\,, x \leq y \leq 2x\}$.

Portanto,

$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy = \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x}{y}\,dydx = \int_1^2 x \int_x^{2x} \frac{1}{y}\,dydx = \int_1^2 x \big[\ln y\big]_x^{2x}\,dx =$$

$$= \int_1^2 x(\ln 2x - \ln x)\,dx = \int_1^2 x \ln \frac{2x}{x}\,dx = \int_1^2 x \ln 2\,dx = \ln 2 \int_1^x x\,dx =$$

$$= \ln 2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} \ln 2\,.$$

Observação: Podemos, também, enquadrar D como tipo II. Haverá, no entanto, uma complicação adicional, se fizermos isso, pois a fronteira direita de D é a reta $x = 1$ e a fronteira esquerda de D é constituída de duas partes, pela reta $y = x$ abaixo da reta $y = 2$ e pela reta $y = 2x$, acima de $y = 2$. Então é necessário decompor D em duas partes D_1 e D_2: $D = D_1 \cup D_2$. Logo,

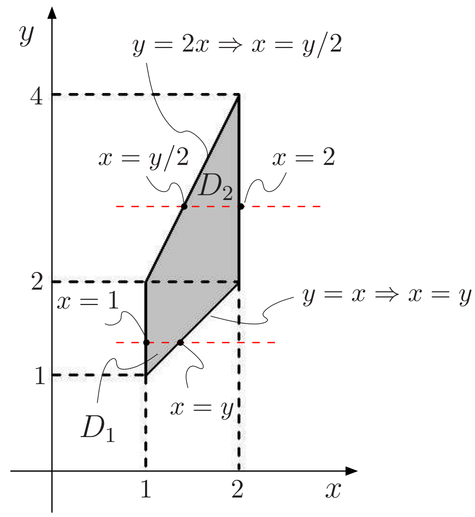
$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy = \iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dxdy + \iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dxdy\,.$$

Projetando D_1 sobre o eixo y, temos $1 \leq y \leq 2$. A região D_1 é limitada à esquerda por $x = 1$ e à direita pela reta $x = y$. Logo, $1 \leq x \leq y$. Então $D_1 = \{(x, y);\ 1 \leq y \leq 2\,, 1 \leq x \leq y\}$. Assim,

$$\iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dxdy = \int_1^2 \int_1^y \frac{x}{y}\,dxdy = \int_1^2 \frac{1}{y} \int_1^y x\,dxdy = \int_1^2 \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} \left(y^2 - 1\right) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(y - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \ln y\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2 - \ln 2) - \left(\frac{1}{2} - \ln 1\right)\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\,.$$



Projetando D_2 sobre o eixo y, temos $2 \leq y \leq 4$. A região D_2 está limitada à esquerda pela reta $x = y/2$ e à direita por $x = 2$. Logo, $y/2 \leq x \leq 2$. Então $D_2 = \{(x,y);\ 2 \leq y \leq 4\,,\ y/2 \leq x \leq 2\}$ e

$$\iint\limits_{D_2} \frac{x}{y}\,dxdy = \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{x}{y}\,dxdy = \int_2^4 \frac{1}{y} \int_{y/2}^2 x\,dxdy = \int_2^4 \frac{1}{y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{1}{y}\left(4 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{4}{y} - \frac{y}{4}\right) dy = \frac{1}{2}\left[4\ln y - \frac{y^2}{8}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(4\ln 4 - 2) - \left(4\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\,.$$

Portanto,

$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\ln 2$$

Obtivemos, assim, o mesmo resultado anterior.

Exercício 2: Esboce a região de integração e troque a ordem de integração em:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx$

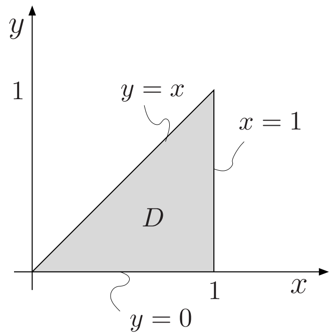
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y)dydx$

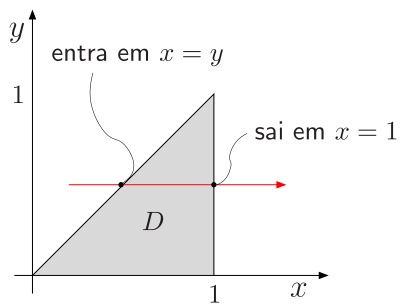
d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y-1}^{2-2y} f(x,y)dxdy.$

Solução:

a) A região de integração é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$ (tipo I). Logo, D está limitada pelas retas verticais $x = 0$ (eixo y) e $x = 1$; limitada inferiormente pela reta $y = 0$ (eixo x) e superiormente pela reta $y = x$. Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



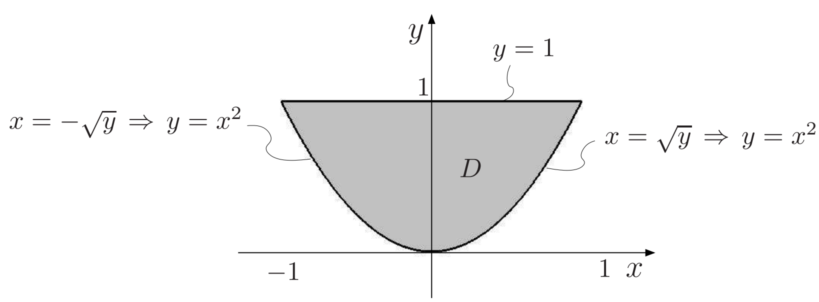
Para inverter a ordem de integração devemos descrever D como região do tipo II.



Vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ e $y = 1$. Considerando uma reta horizontal no interior de D, vemos que ela entra em D em $x = y$ e sai de D em $x = 1$. Então, temos $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases}$. Logo,

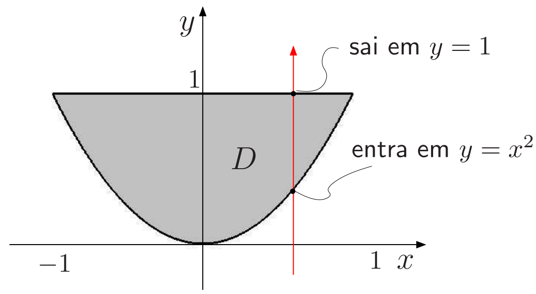
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dxdy\,.$$

b) A região de integração é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$ (tipo II). Logo, D está limitada pelas retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$. À esquerda D é limitada pela curva $x = -\sqrt{y}$ e à direita pela curva $x = \sqrt{y}$. De $x = \pm\sqrt{y}$, temos $y = x^2$. Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como região do tipo I

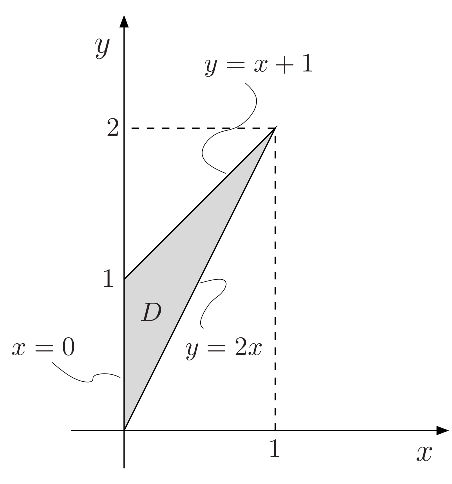
Vemos que D está compreendida entre as retas verticais $x = -1$ e $x = 1$. Considerando uma reta vertical, no interior de D, diferente do eixo y, vemos que ela entra em D em $y = x^2$ e sai de D em $y = 1$.



Então, temos $D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$. Logo,

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)dydx\,.$$

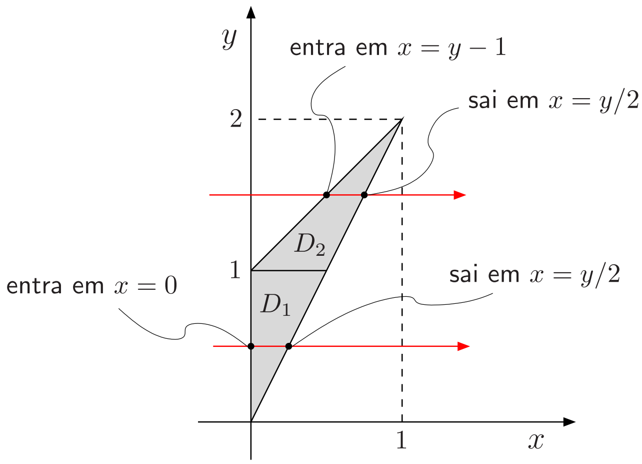
c) A região de integração D é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$ (tipo I). Logo, D está compreendida entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$ e está limitada inferiormente pela reta $y = 2x$ (ou $x = y/2$) e superiormente pela reta $y = x + 1$ (ou $x = y - 1$). Assim, o esboço da região D está representado pela figura que se segue. Como D está limitada à esquerda pela curva $x = 0$ e pela reta $y = x + 1$,



concluímos que D não é do tipo II. Mas podemos olhar para D como a união de duas regiões do tipo II, isto é, $D = D_1 \cup D_2$.

Vemos que D_1 está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ e $y = 1$ e que toda reta horizontal, no interior de D_1, entra em D_1 em $x = 0$ e sai de D_1 em $x = y/2$. Logo, $D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y/2 \end{cases}$.

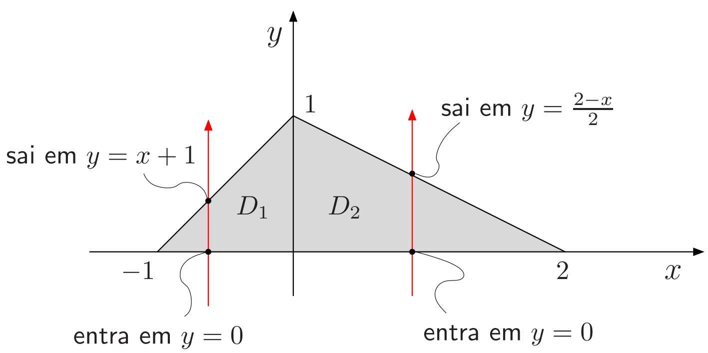
Vemos que D_2 está compreendida entre as retas horizontais $y = 1$ e $y = 2$ e que qualquer reta horizontal, no interior de D_2, entra em D_2 em $x = y - 1$ e sai de D_2 em $x = y/2$. Logo, $D_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y - 1 \leq x \leq y/2 \end{cases}$.



Assim,

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_0^{y/2} f(x,y)\,dxdy + \int_1^2 \int_{y-1}^{y/2} f(x,y)\,dxdy\,.$$

d) A região de integração é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y-1 \leq x \leq 2-2y \end{cases}$ (tipo II). Logo, D está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$. De $y - 1 \leq x \leq 2 - 2y$, vemos que D está limitada à esquerda pela reta $x = y - 1$ (ou $y = x + 1$) e à direita pela reta $x = 2 - 2y$ (ou $y = (2 - x)/2$). Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



Como a fronteira superior de D é formada pela retas $x = y - 1$ e $x = 2 - 2y$, vemos que D não é do tipo I. Mas $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são do tipo I.

Vemos que D_1 está compreendida entre as retas verticais $x = -1$ e $x = 0$ e que qualquer reta vertical no interior de D_1 entra em D_1 em $y = 0$ e sai de D_1 em $y = x+1$. Logo $D_1 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq x+1 \end{cases}$.

Vemos que D_2 está compreendida entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 2$ e que qualquer reta vertical no interior de D_2 entra em D_2 em $y = 0$ e sai de D_2 em $y = (2 - x)/2$. Logo, D_2 : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq (2-x)/2 \end{cases}$.

Assim,

$$\int_0^1\int_{y-1}^{2-2y} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0\int_0^{x+1} f(x,y)dydx + \int_0^2\int_0^{(2-x)/2} f(x,y)dydx\,.$$

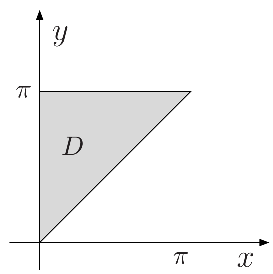
Exercício 3: Invertendo a ordem de integração, calcule:

a) $\displaystyle\int_0^\pi\int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dydx$ c) $\displaystyle\int_0^3\int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}dydx$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy$ d) $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dydx$

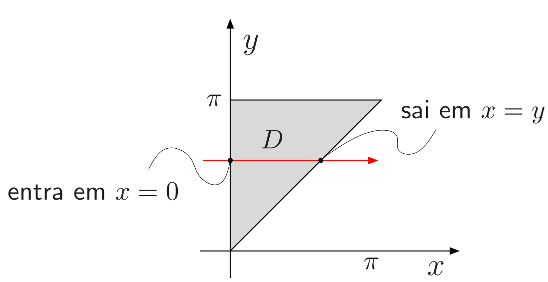
Solução:

a) A região de integração D é dada por $D:\begin{cases}0\leq x\leq\pi\\ x\leq y\leq\pi\end{cases}$ (tipo I). De $0\leq x\leq\pi$, vemos que D está compreendida entre as retas verticais $x=0$ (eixo y) e $x=\pi$. De $x\leq y\leq\pi$, vemos que D está limitada inferiormente pela reta $y=x$ e superiormente pela reta $y=\pi$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como uma região do tipo II

Vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y=0$ (eixo x) e $y=\pi$ e que qualquer reta horizontal no interior de D entra em D em $x=0$ e sai de D em $x=y$.

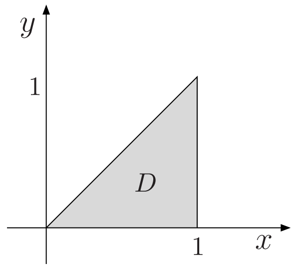


Logo $D:\begin{cases}0\leq y\leq\pi\\ 0\leq x\leq y\end{cases}$. Assim,

$$\int_0^\pi\int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dydx = \int_0^\pi\int_0^y \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dxdy = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\big[x\big]_0^y\,dy =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cdot y\,dy = \int_0^\pi \operatorname{sen} y\;dy = \big[-\cos y\big]_0^\pi = 2\,.$$

b) A região de integração D é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases}$ (tipo II). De $0 \leq y \leq 1$ vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$. De $y \leq x \leq 1$ vemos que D está limitada à esquerda pela reta $x = y$ e à direita pela reta $x = 1$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como uma região do tipo I

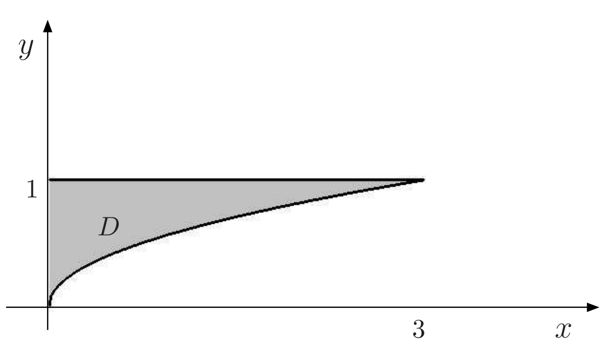
Vemos que D está compreendida entre as retas verticais $x = 0$ (eixo y) e $x = 1$. Logo $0 \leq x \leq 1$. Vemos, também, que D está limitada inferiormente pela reta $y = 0$ e superiormente pela reta $y = x$. Então, $0 \leq y \leq x$. Assim,

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dydx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{x}\left(e^{x^2} - 1\right) dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx - \int_0^1 x\, dx =$$

$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}\,.$$

c) A região de integração D é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{\dfrac{x}{3}} \leq y \leq 1 \end{cases}$ (tipo I). De $0 \leq x \leq 3$, vemos que D está compreendida entre as retas verticais $x = 0$ (eixo y) e $x = 3$. De $\sqrt{\dfrac{x}{3}} \leq y \leq 1$, vemos que D está limitada inferiormente pela curva $y = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$ (ou $x = 3y^2$, com $y \geq 0$) e superiormente pela reta $y = 1$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



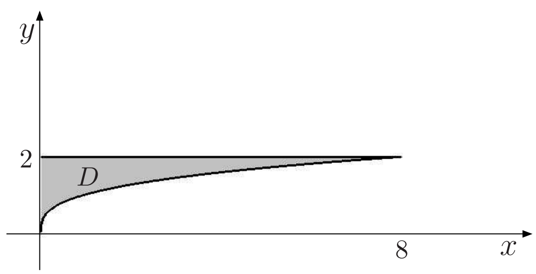
Descrição de D como uma região do tipo II

Vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$. Logo, $0 \leq y \leq 1$. Considerando uma reta horizontal, no interior de D, vemos que ela entra em D em $x = 0$ e sai de D em $x = 3y^2$. Logo, $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 3y^2 \end{cases}$. Então,

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dydx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3}\, dxdy = \int_0^1 e^{y^3} \left[x\right]_0^{3y^2} dy =$$

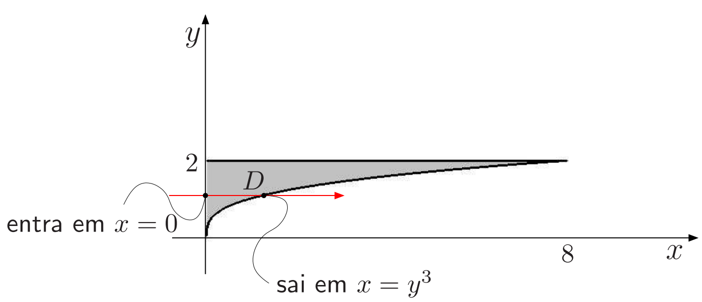
$$= \int_0^1 e^{y^3} \left(3y^2\right) dy = \left[e^{y^3}\right]_0^1 = e - 1\,.$$

d) A região de integração D é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$ (tipo I). De $0 \leq x \leq 8$, vemos que D está compreendida entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 8$. De $\sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$, vemos que D está limitada inferiormente pela curva $y = \sqrt[3]{x}$ (ou $x = y^3$) e superiormente pela reta $y = 2$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como região do tipo II

Vemos que D está compreendida entre retas horizontais $y = 0$ e $y = 2$. Vemos, também, que qualquer reta horizontal no interior de D entra na região em $x = 0$ e sai da região em $x = y^3$.



Logo, $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq y^3 \end{cases}$. Assim,

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dxdy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(y^4+1)}{y^4+1} = \frac{1}{4}\Big[\ln(y^4+1)\Big]_0^2 = \frac{1}{4}(\ln 17 - \ln 1) = \frac{1}{4}\ln 17\,.$$

Exercício 4: Em cada caso calcule, por meio de integral dupla, a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas.

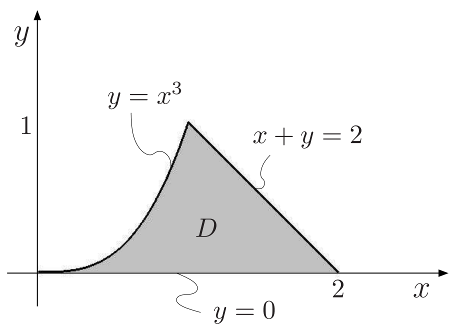
a) $y = x^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

b) $x = y^2 + 1$ e $x + y = 3$.

c) $y = x^2$, $x - y = 1$, $x = 1$ e $x = -1$.

Solução:

a) De $y = x^3$ e $x + y = 2$, temos $x^3 + x - 2 = 0$ portanto $x = 1$. Logo, a interseção ocorre em $(1, 1)$. O esboço da região D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como uma região do tipo II

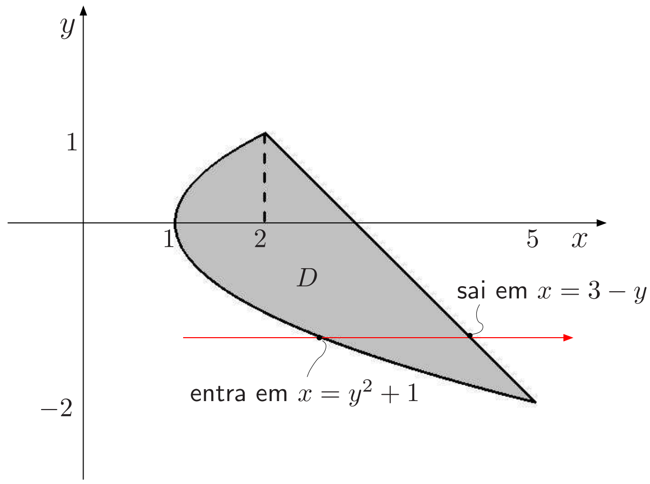
Vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$. Considerando uma reta horizontal qualquer, no interior de D, vemos que ela entra em D em $x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$ e sai de D em $x = 2 - y$. Então temos $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^{1/3} \leq x \leq 2 - y \end{cases}$.

Como a área de D é dada por $A(D) = \iint_D dxdy$ temos,

$$A(D) = \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^{2-y} dxdy = \int_0^1 \left(2 - y - y^{1/3}\right) dy =$$

$$= \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}y^{4/3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ u.a.}$$

b) De $x = y^2 + 1$ e $x + y = 3$, temos $y^2 + y - 2 = 0$, portanto $y = -2$ ou $y = 1$. Logo, as interseções são $(5, -2)$ e $(2, 1)$. Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como uma região do tipo II

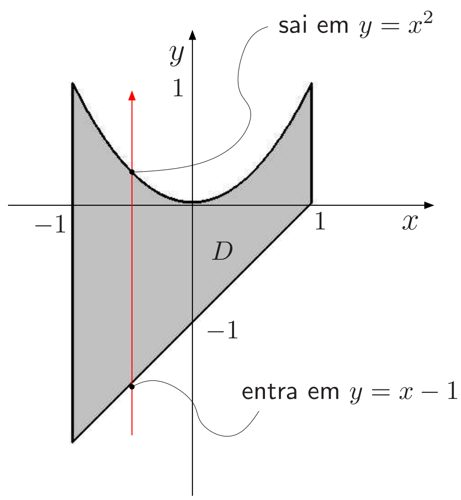
Vemos que D está compreendida entre as retas horizontais $y = -2$ e $y = 1$. Considerando uma reta horizontal qualquer no interior de D, diferente do eixo x, vemos que ela entra em D em $x = y^2 + 1$ e sai de D em $x = 3 - y$. Então, temos $D : \begin{cases} -2 \leq y \leq 1 \\ y^2 + 1 \leq x \leq 3 - y \end{cases}$. Portanto,

$$A(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{1} \int_{y^2+1}^{3-y} dxdy = \int_{-2}^{1} \left(3 - y - y^2 - 1\right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2} \textit{ u.a.}$$

c) O esboço da região D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como uma região do tipo I

Vemos que D está limitada entre as retas verticais $x = -1$ e $x = 1$. Vemos, também, que qualquer reta vertical no interior de D, diferente do eixo y, entra em D em $y = x - 1$ e sai de D em $y = x^2$.

Assim $D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 \leq y \leq x^2 \end{cases}$. Então,

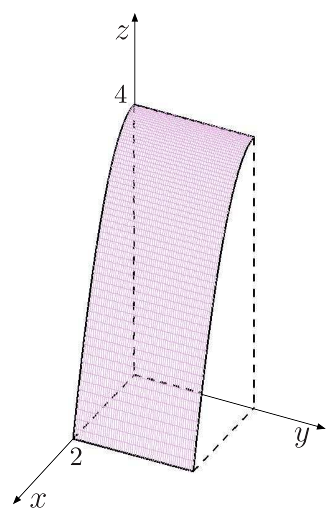
$$A(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{x^2} dydx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x + 1\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W, no primeiro octante, limitado pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ e pelos planos $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

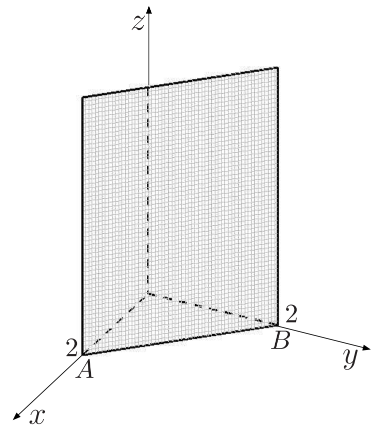
Solução: Vamos fazer o esboço, no primeiro octante, da superfície de equação $z = 4 - x^2$ dita cilindro parabólico.

No plano xz, traçamos o arco de parábola $z = 4 - x^2$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$. Como esta equação não depende da variável y, consideramos, por pontos da parábola, as semirretas paralelas ao eixo y.

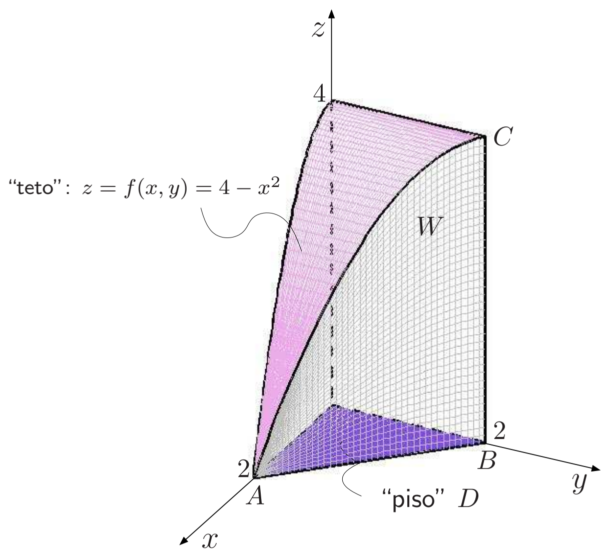


Agora, vamos fazer o esboço, no primeiro octante, da porção do plano de equação $x + y = 2$.

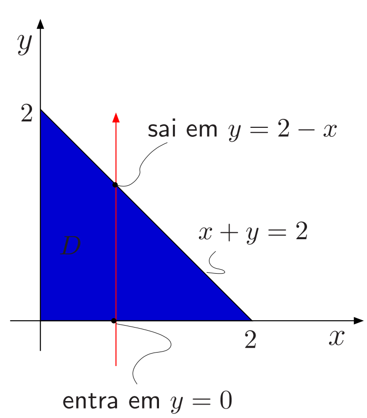
No plano xy traçamos o segmento de reta $x + y = 2$ que liga $A(2, 0, 0)$ a $B(0, 2, 0)$. Como esta equação não depende da variável z, traçamos por pontos do segmento as semirretas paralelas ao eixo z.



Vemos que $A(2,0,0)$ e $C(0,2,4)$ são pontos comuns às duas superfícies. Então, a curva de interseção é a curva obtida ao ligar esses dois pontos. Considerando que o sólido é limitado pelos planos $x=0$, $y=0$ e $z=0$, temos o esboço de W representado na figura que se segue.



Temos $V(W) = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, onde $f(x,y) = 4 - x^2$, e D está representado na seguinte região triangular.



Descrevendo D como uma região do tipo I, temos $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2-x \end{cases}$. Então,

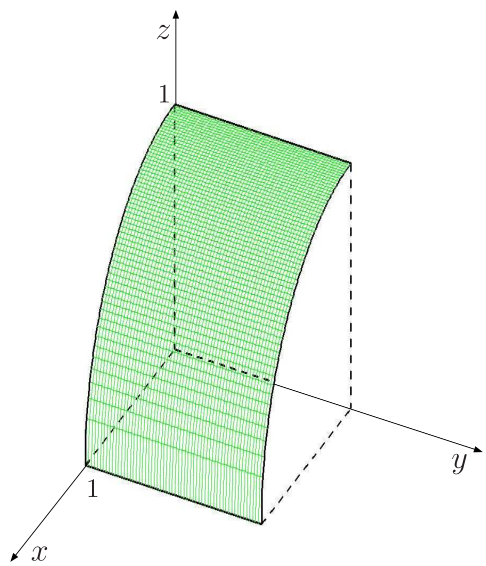
$$V(W) = \iint_D (4-x^2)\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x^2)\,dydx = \int_0^2 (4-x^2)(2-x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right]_0^2 = \frac{20}{3} \text{ u.v.}$$

Exercício 6: Esboce o sólido, no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 2x$, $y = 0$ e $z = 0$, e encontre o seu volume.

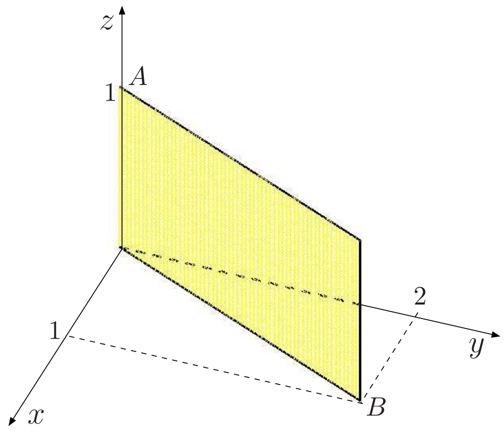
Solução: Vamos fazer o esboço, no primeiro octante, da superfície de equação $x^2 + z^2 = 1$ dita cilindro circular.

No plano xz, traçamos o arco de circunferência $x^2+z^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$. Como esta equação não depende da variável y, consideramos, por pontos do arco as semirretas paralelas ao eixo y.

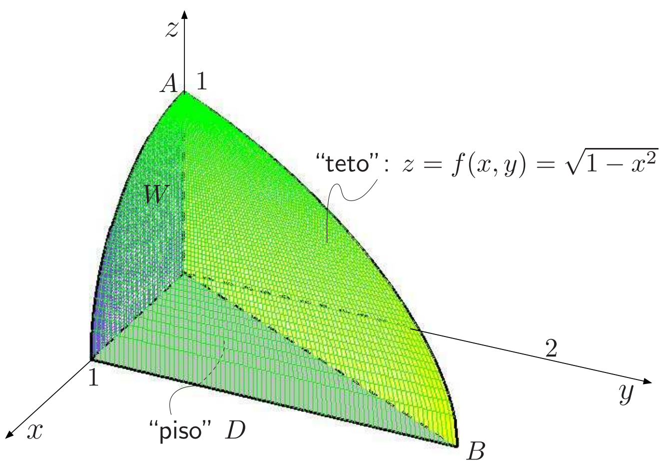


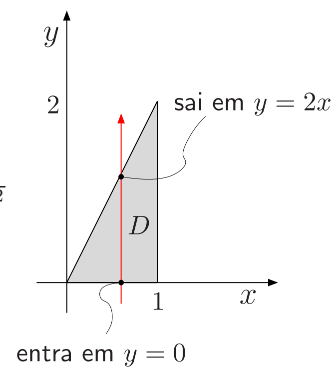
Agora, vamos fazer o esboço, no primeiro octante, da porção do plano $y = 2x$.

No plano xy, traçamos a semirreta $y = 2x$, com $x \geq 0$. Como esta equação não depende da variável z, por pontos da semirreta, traçamos semirretas paralelas ao eixo z.



Vemos que $A(0,0,1)$ e $B(1,2,0)$ são pontos comuns às duas superfícies. Então, a curva de interseção é obtida ao ligarmos tais pontos. Considerando que W é limitado pelos planos $y=0$ e $z=0$, temos que o esboço de W está representado na figura que se segue.





Temos

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy,$$

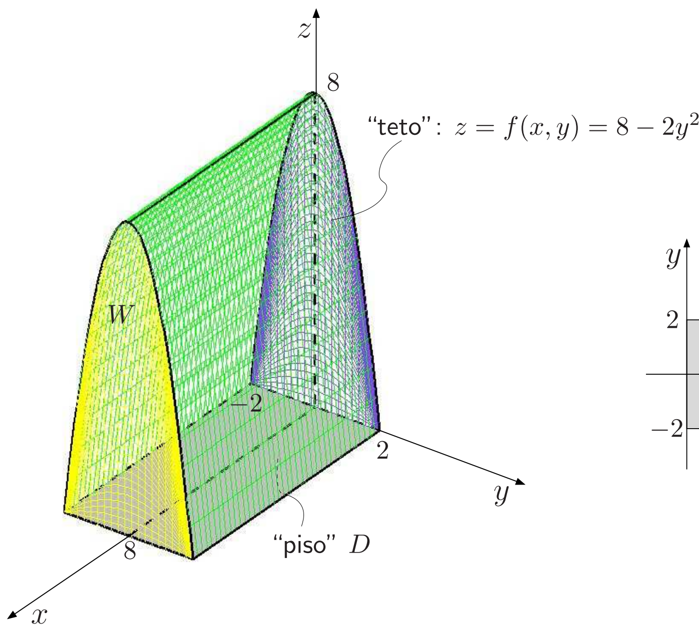
onde D, como tipo I, é dado por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$. Então,

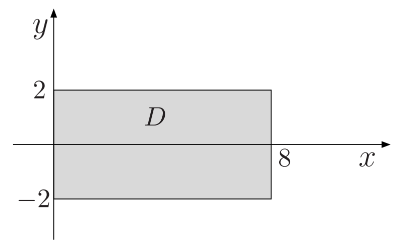
$$V(W) = \int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1-x^2}\,dydx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot 2x\,dx =$$

$$= -\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}(-2x)\,dx = -\frac{2}{3}\left[(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3} \text{ u.v.}$$

Exercício 7: Seja V o volume de um sólido delimitado pelo cilindro parabólico $z = 8 - 2y^2$ e pelos planos $x = 0$, $x = 8$ e $z = 0$. Calcule V.

Solução: Inicialmente traçamos, no plano yz, a parábola $z = 8 - 2y^2$. Como esta equação não depende da variável x, consideramos, por pontos da parábola, as retas paralelas ao eixo x. Como o sólido está limitado pelos planos $x = 0$, $x = 8$ e $z = 0$, temos o esboço do sólido W representado na figura que se segue.





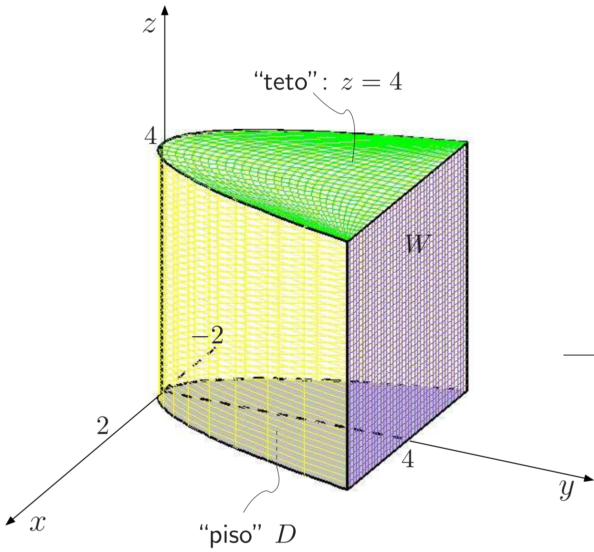
Portanto,

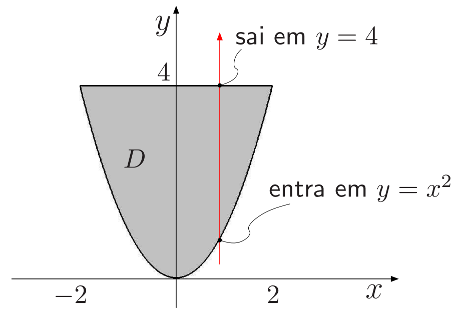
$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D (8 - 2y^2)\,dxdy = \int_{-2}^{2}\int_0^8 (8 - 2y^2)\,dxdy =$$

$$= 8\left[8y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 16\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{512}{3} \text{ u.v.}$$

Exercício 8: Calcule o volume do sólido W delimitado pelas superfícies $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 4$.

Solução: No plano xy, esboçamos a parábola $y = x^2$. Como esta equação não depende da variável z, traçamos, por pontos da parábola, as retas paralelas ao eixo z. Considerando que o sólido está limitado pelos planos $z = 0$, $z = 4$ e $y = 4$, temos o esboço de W representado na figura que se segue.





Portanto,

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D 4\,dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} 4\,dydx =$$

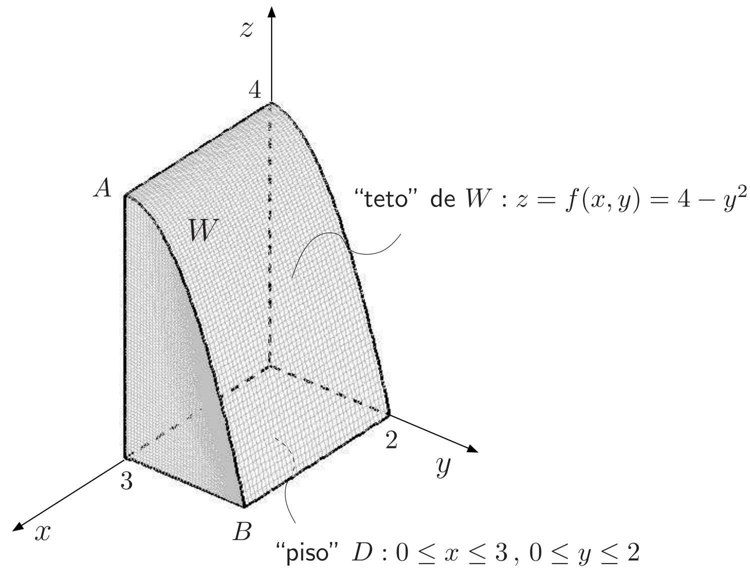
$$= 4\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = 4\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 4\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{128}{3}\ \textit{u.v.}$$

Exercício 9: Encontre o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados, pelo plano $x = 3$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - y^2$.

Solução:

Esboço do sólido W no primeiro octante

No plano yz $(x = 0)$, traçamos a parábola $z = 4 - y^2$ com $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Como esta equação não depende da variável x, consideramos, por pontos da parábola, as semirretas paralelas ao eixo x, com $x \geq 0$. Obtemos, assim, o cilindro parabólico. Agora, traçamos o plano vertical $x = 3$ que intercepta o cilindro parabólico segundo uma curva que contém os pontos $A = (3,0,4)$ e $B = (3,2,0)$. Considerando que o sólido W está limitado pelos planos coordenados, temos o esboço de W representado na figura que se segue.



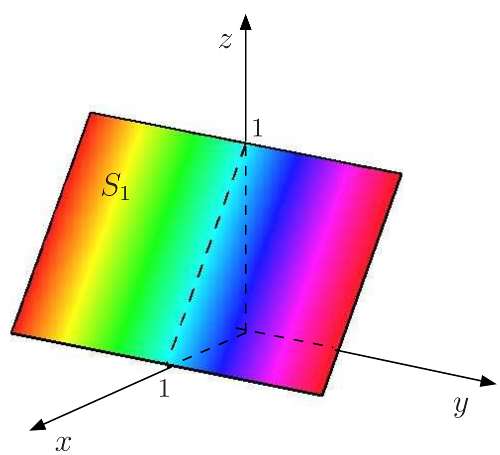
Por integral dupla, temos

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \left(4 - y^2\right) dxdy = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - y^2\right) dydx =$$

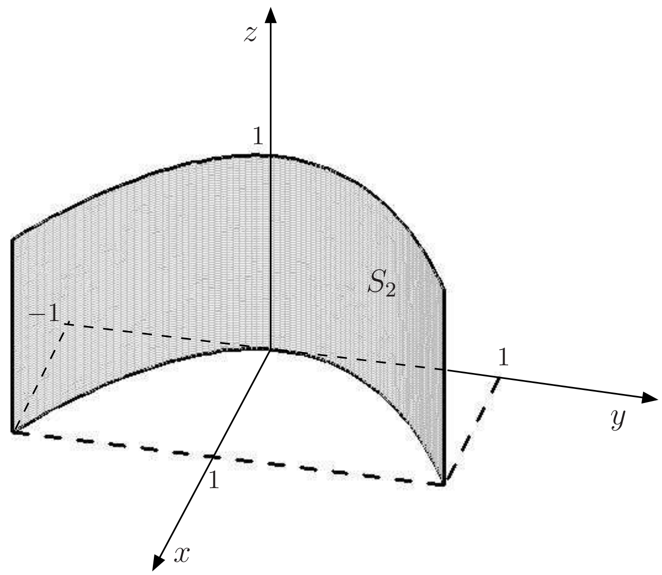
$$= \int_0^3 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^3 \left(8 - \frac{8}{3}\right) dx = \frac{16}{3} \int_0^3 dx = \frac{16}{3} \cdot 3 = 16 \text{ u.v.}$$

Exercício 10: Use uma integral dupla para calcular o volume do sólido W, no primeiro octante, compreendido pelas superfícies $y^2 = x$, $z = 0$ e $x + z = 1$.

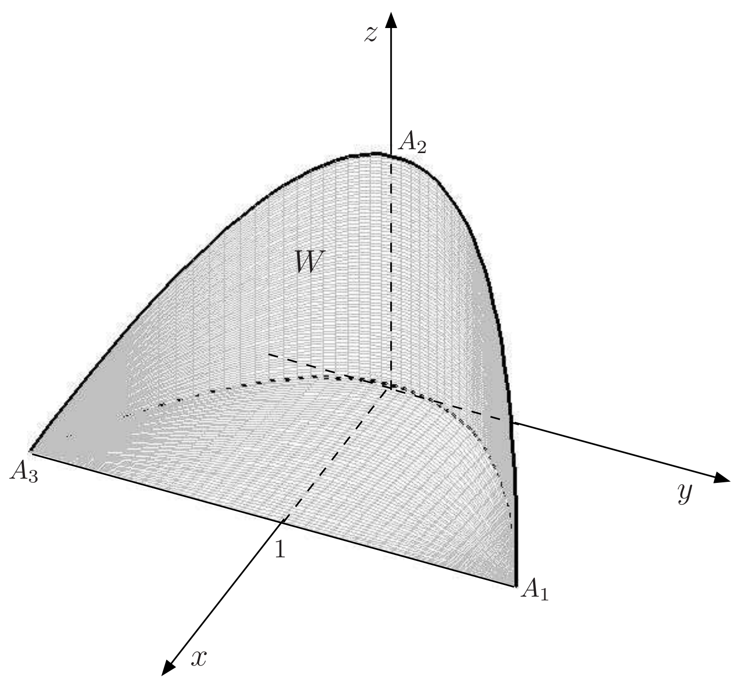
Solução: Para esboçar o plano $x + z = 1$, desenhamos inicialmente, no plano xz, a reta $x + z = 1$. Como esta equação não contém a variável y, consideramos, por pontos da reta, as retas paralelas ao eixo y. Obtemos, assim, o esboço do plano $x + z = 1$.



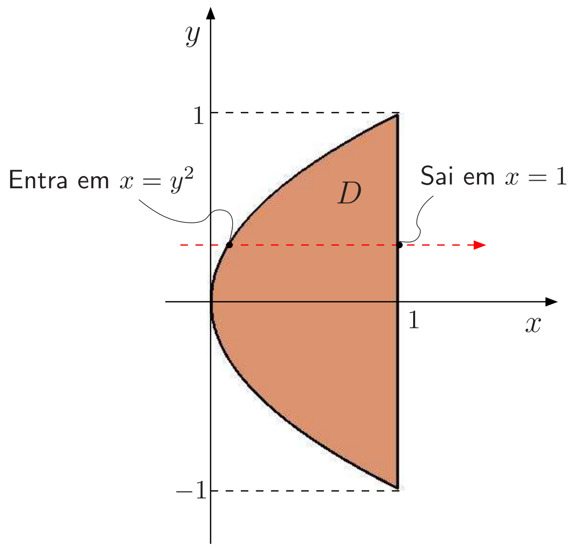
Para esboçar a superfície de equação $x = y^2$ (dita cilindro parabólico, pela ausência da variável z), desenhamos, inicialmente, a parábola $x = y^2$, no plano xy, e, por pontos da parábola, consideramos as retas paralelas ao eixo z, pois a equação $x = y^2$ não contém a variável z. Obtemos, assim, o esboço da superfície de equação $x = y^2$.



Observemos que $A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1)$ e $A_3 = (1, -1, 0)$ são pontos comuns às duas superfícies. Portanto, ao ligarmos A_1, A_2 e A_3 temos a curva interseção das duas superfícies.



Considerando que o sólido W está limitado pelo plano $z = 0$ (plano xy), temos o esboço de W. Vemos que o "teto" de W é o gráfico de $z = 1 - x$ e que o "piso" de W é a região D dada por:



$D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1\,, y^2 \leq x \leq 1\}$. Logo,

$$V(W) = \iint_D (1-x)\ dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}(1-x)\ dxdy = \int_{-1}^{1}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(y^2 - \frac{y^4}{2}\right)\right] dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - y^2 + \frac{y^4}{2}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{10}\right]_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{15}\ \text{u.v.}$$