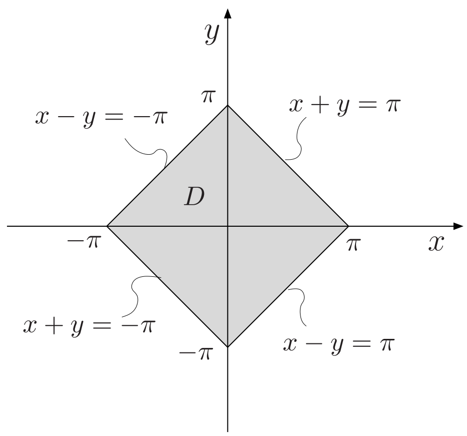
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 2

Exercício 1: Use a mudança $u = x+y$ e $v = x-y$ e calcule a integral de $f(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)$ sobre a região $D : |x| + |y| \leq \pi$.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.

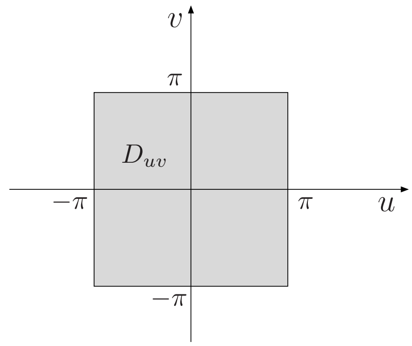


De $u = x + y$ e $v = x - y$ temos $x = \dfrac{u+v}{2}$ e $y = \dfrac{u-v}{2}$. Portanto, o jacobiano da mudança é dado por:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Como $dxdy = |J|\, dudv$ então $dxdy = \dfrac{1}{2}\, dudv$. A função $f(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)$ transforma-se em $u^2 \operatorname{sen}^2 v$.

Como D é limitada pelas retas $x + y = \pi$, $x + y = -\pi$, $x - y = \pi$ e $x - y = -\pi$, então D_{uv} é limitada pelas retas $u = \pi$, $u = -\pi$, $v = \pi$ e $v = -\pi$.



Assim, pela fórmula da mudança de variáveis temos:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\,dxdy =$$

$$= \iint_{D_{uv}} (u^2 \operatorname{sen}^2 v)\,\frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 v \int_{-\pi}^{\pi} u^2\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 v \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 v\,dv =$$

$$= \frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[v - \frac{\operatorname{sen} 2v}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{3}\,.$$

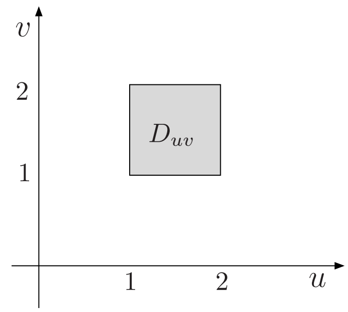
Exercício 2: Use a mudança de variáveis $u = xy$ e $v = y/x$, e calcule a integral dupla $\iint_D (x^2 + 2y^2)\,dA$, sendo D a região do plano xy no primeiro quadrante, delimitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 2x$.

Solução: Se $u = xy$ e $v = y/x$ vemos que $uv = y^2$ e $\frac{u}{v} = x^2$. Assim, $x^2 + 2y^2 = \frac{u}{v} + 2uv$. Por outro lado

$$J^{-1} = \frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v\,.$$

Logo, $J = \frac{1}{2v}$. Como $dA = |J|\,dudv$, então $dA = \frac{1}{2v}\,dudv$.

Como D está limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ (ou $y/x = 1$) e $y = 2x$ (ou $y/x = 2$) então D_{uv} está limitada por $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ e $v = 2$.



Logo, pela fórmula de mudança de variáveis, temos:

$$\iint_D (x^2+2y^2)\,dA = \iint_{D_{uv}} \left(\frac{u}{v}+2uv\right)\frac{1}{2v}\,dudv =$$

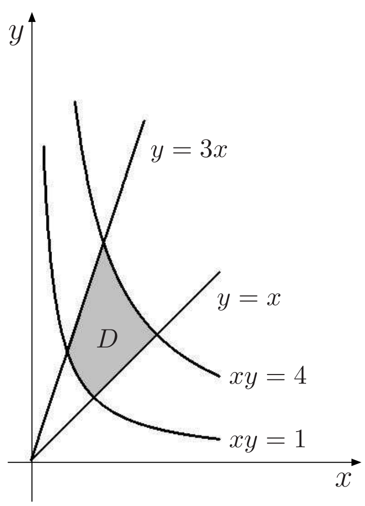
$$= \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} \left(\frac{u}{v^2}+2u\right) dudv = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 \left(\frac{1}{v^2}+2\right) u\,dudv =$$

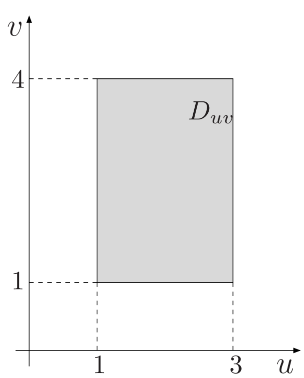
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{v^2}+2\right)\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 dv = \frac{3}{4}\int_1^2 \left(\frac{1}{v^2}+2\right) dv =$$

$$= \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{v}+2v\right]_1^2 = \frac{3}{4}\left[\left(-\frac{1}{2}+4\right)-(-1+2)\right] = \frac{15}{8}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\iint_D xy^3\,dA$ da região D do primeiro quadrante, limitada por $y=x$, $y=3x$, $xy=1$ e $xy=4$.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.





Com a transformação $u=y/x$, $v=xy$, a região D transforma-se na região D_{uv} limitada pelas retas

$u = 1$, $u = 3$, $v = 1$ e $v = 4$. Temos:

$$J^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\frac{2y}{x} = -2u\,.$$

Logo:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{J^{-1}} = \frac{1}{-2u} = -\frac{1}{2u}\,.$$

De $u = y/x$ e $v = xy$ temos que $uv = y^2$. Portanto, o integrando $xy^3 = xy \cdot y^2$ transforma-se em $v \cdot uv = uv^2$. Assim, da fórmula da mudança de variáveis temos:

$$\iint\limits_D xy^3\, dA = \iint\limits_{D_{uv}} uv^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \iint\limits_{D_{uv}} uv^2 \left|-\frac{1}{2u}\right| dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{uv}} v^2\, dudv = \frac{1}{2}\int_1^3\int_1^4 v^2\, dvdu = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{v^3}{3}\right]_1^4 du =$$

$$= \frac{1}{6}(64-1)\int_1^3 du = \frac{63}{3}\big[u\big]_1^3 = \frac{21}{2}(3-1) = 21\,.$$

Exercício 4: Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais duplas:

a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, sendo D o disco de centro na origem e raio 2.

b) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 dA$, onde D é a região dada por $x^2+y^2 \leq 4$, com $x \geq 0$.

c) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dxdy$, sendo $D : 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2$, com $y \geq 0$.

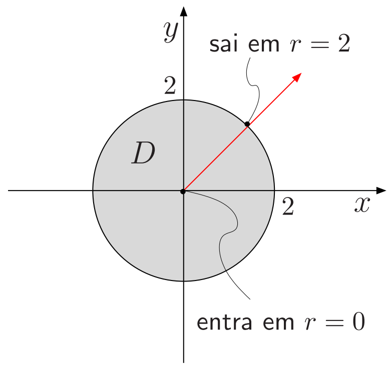
d) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dydx$.

e) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$, sendo $D : 1 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq x$.

f) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\, dA$, sendo $D : x^2+y^2-2y \leq 0$.

Solução:

a) O esboço da região D está representado na figura que se segue.

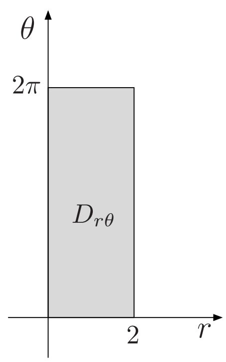


Em coordenadas polares temos $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$ e $dxdy = rdrd\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo, vemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D, vemos que a semirreta entra em D na origem onde $r = 0$ e sai de D em um ponto da circunferência onde $r = 2$. Então, $0 \leq r \leq 2$. Assim, a região D é transformada na região $D_{r\theta}$ dada por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.



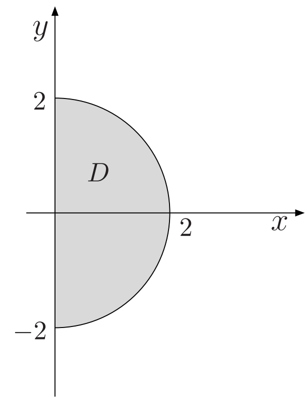
Logo:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r\, drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2\, drd\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2\, dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}\,.$$

Observação: Notem que em coordenadas polares qualquer disco de centro na origem transforma-se em um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados.

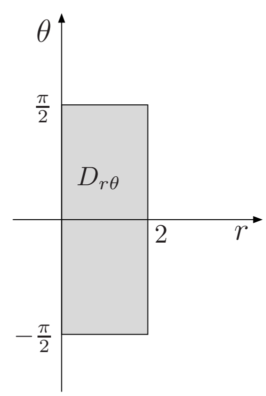
b) O esboço da região D está representado na figura que se segue.



Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, a partir do eixo y negativo, onde $\theta = -\pi/2$ até o eixo y positivo onde $\theta = \pi/2$, vemos que $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D, vemos que a semirreta OP entra em D na origem onde $r = 0$ e sai de D em um ponto da circunferência onde $r = 2$. Logo, $0 \leq r \leq 2$. Assim, a região D é transformada na região $D_{r\theta}$ dada por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$.

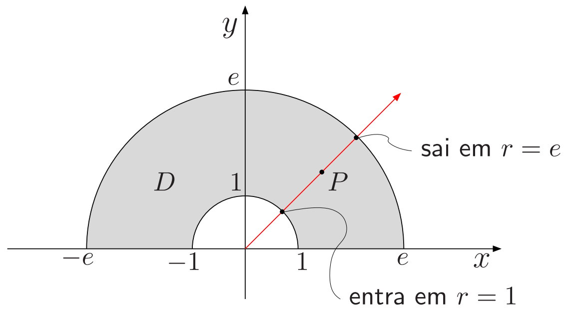


Logo:

$$\iint_D (x^2+y^2)^2 dA = \iint_{D_{r\theta}} r^4 \cdot r \, dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^5 \, dr d\theta =$$

$$= \int_0^2 r^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta dr = \pi \int_0^2 r^5 \, dr = \pi \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3} \, .$$

c) O esboço da região D está representado na figura que se segue.

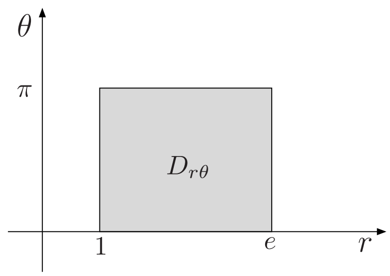


Em coordenadas polares temos $\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \dfrac{\ln(r^2)}{r^2} = \dfrac{2\ln r}{r^2}$ e $dxdy = r\,drd\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, vemos que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D, vemos que a semirreta OP entra em D em um ponto da circunferência $x^2+y^2 = 1$ onde $r = 1$ e sai de D em um ponto da circunferência $x^2+y^2 = e^2$ onde $r = e$. Então, $1 \leq r \leq e$. Assim, a região D é transformada na região $D_{r\theta}$ dada por $D_{r\theta} : \begin{cases} 1 \leq r \leq e \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$.



Logo:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{2\ln r}{r^2} \cdot r\;drd\theta = 2\iint_{D_{r\theta}} \frac{\ln r}{r}\,drd\theta =$$

$$= 2\int_1^e \frac{\ln r}{r}\int_0^\pi d\theta dr = 2\pi \int_1^e \frac{\ln r}{r}\,dr\,.$$

Fazendo $u = \ln r$ temos $du = \dfrac{1}{r}\,dr$. Por outro lado, para $r = 1$ temos $u = \ln 1 = 0$ e para $r = e$ temos $u = \ln e = 1$. Então:

$$\int_0^e \frac{\ln r}{r}\,dr = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

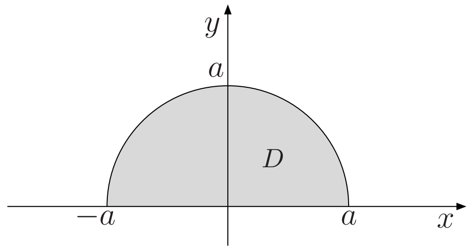
Substituindo acima temos:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi\,.$$

d) Temos

$$I = \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dydx = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

onde D é dada por $D : \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2\,, y \geq 0$ cujo esboço está representado na figura que se segue.

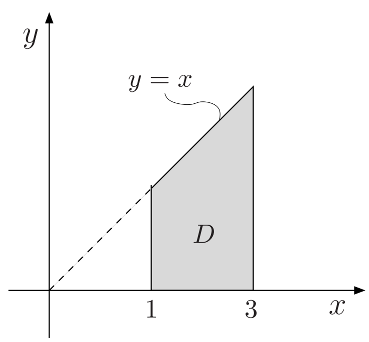


Passando para coordenadas polares temos $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ e $dxdy = r\,drd\theta$ e a região D transforma-se em $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$. Logo:

$$I = \iint_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r\,drd\theta = \int_0^a e^{-r^2} r \int_0^\pi d\theta dr = \pi \int_0^a e^{-r^2} r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{-2} \int_0^a e^{-r^2}(-2r)dr = -\frac{\pi}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

e) O esboço da região D está representado na figura que se segue.



Por coordenadas polares temos $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \dfrac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r\,drd\theta = drd\theta$.

<u>*Descrição de D em coordenadas polares*</u>

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo onde $\theta = 0$ até a reta $y = x$ onde $\theta = \pi/4$, vemos que $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D, vemos que a semirreta OP entra em D na reta vertical $x = 1$ ou $r\cos\theta = 1$ donde $r = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ e sai de D na reta vertical $x = 3$ ou $r\cos\theta = 3$ donde $r = \dfrac{3}{\cos\theta} = 3\sec\theta$. Então, $\sec\theta \leq r \leq 3\sec\theta$. Assim, a região D é transformada na região $D_{r\theta}$ dada por $D_{r\theta}: \begin{cases} \sec\theta \le r \le 3\sec\theta \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \end{cases}$. Logo:

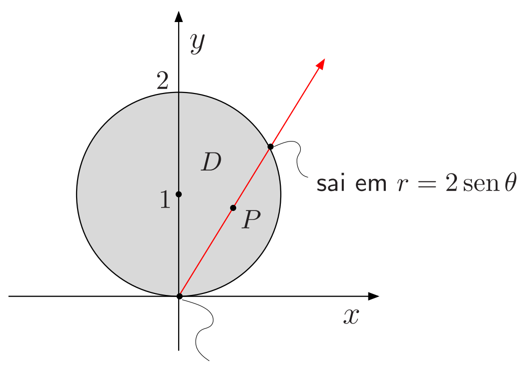
$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \iint\limits_{D_{r\theta}} dr d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_{\sec\theta}^{3\sec\theta} dr d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}(3\sec\theta - \sec\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\sec\theta\, d\theta = 3\big[\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\big]_0^{\pi/4} =$$

$$= 3\left[\ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\sec 0 + \operatorname{tg} 0)\right] =$$

$$= 3\big[\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(1+0)\big] = 3\ln(\sqrt{2}+1)\,.$$

f) De $x^2+y^2-2y=0$ temos $x^2+(y-1)^2=1$. Assim, o esboço da região D está representado na figura a seguir.



Temos:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dA = \iint\limits_D x\,dA + \iint\limits_D y\,dA\,.$$

Como $f(x,y)=x$ é uma função ímpar na variável x e a região D tem simetria em relação ao eixo y, então:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_D x\,dA = 0\,.$$

Assim:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dA = \iint\limits_D y\,dA\,.$$

Em coordenadas polares temos $ydA = (r\operatorname{sen}\theta)r\,drd\theta = r^2\operatorname{sen}\theta\,drd\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo onde $\theta = 0$ até o eixo x negativo onde $\theta = \pi$, vemos que $0 \le \theta \le \pi$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D, não situado no eixo y, vemos que a semirreta OP entra em D na origem onde $r=0$ e sai de D em um ponto da circunferência $x^2+y^2=2y$

ou $r^2 = 2r \operatorname{sen}\theta$ donde $r = 2\operatorname{sen}\theta$, para $r \neq 0$. Então, $0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta$. Assim, a região D é transformada na região $D_{r\theta}$ dada por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$. Logo:

$$\iint_D (x+y)dA = \iint_D y\,dA = \iint_{D_{r\theta}} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\, dr d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

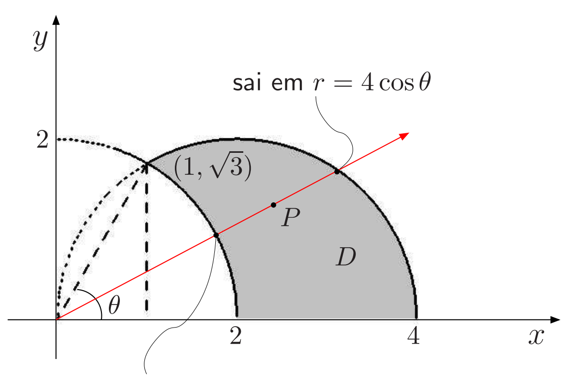
$$= \frac{8}{12}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta =$$

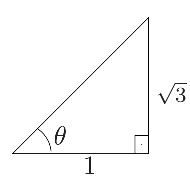
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d(2\theta) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{1}{3}(2\pi + \pi) = \pi\,.$$

Exercício 5: Calcule a área da região no primeiro quadrante, fora da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 4x$.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.





Da teoria, temos que:

$$A(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D_{r\theta}} r\, dr d\theta\,.$$

Descrição de D em coordenadas polares

De $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 4x$ temos $4x = 4$ donde $x = 1$ e, portanto, $y = \sqrt{3}$. Assim, a interseção é o ponto $(1, \sqrt{3})$. No triângulo retângulo acima, temos que $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ donde $\theta = \pi/3$.

Assim, efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo, vemos que $0 \leq \theta \leq \pi/3$.

Considerando um ponto P qualquer no interior de D vemos que a semirrreta OP entra em D na circunferência $x^2+y^2=4$ donde $r=2$ e sai de D na circunferência $x^2+y^2=4x$ donde $r^2=4r\cos\theta$ ou $r=4\cos\theta$, se $r\neq 0$. Assim, $2\leq r\leq 4\cos\theta$. Logo temos $D_{r\theta}: \begin{cases} 2\leq r\leq 4\cos\theta \\ 0\leq\theta\leq\pi/3 \end{cases}$. Então:

$$A(D)=\int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} r\,drd\theta=\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(16\cos^2\theta-4)\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[16\cdot\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)-4\theta\right]_0^{\pi/3}=\frac{1}{2}\left(8\cdot\frac{\pi}{3}+4\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}-4\cdot\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\ \textit{u.a.}$$

Exercício 6: Seja dada a integral dupla

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dydx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dydx\,.$$

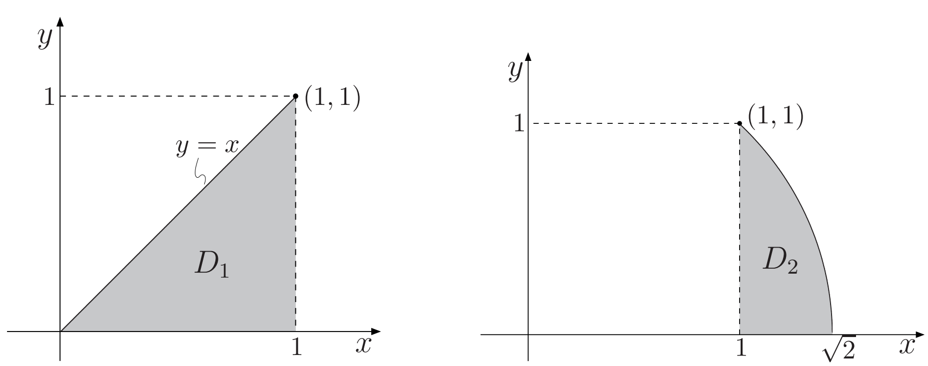
a) Esboce a região D.

b) Expresse a soma das integrais do segundo membro como uma só integral na qual a ordem de integração esteja invertida.

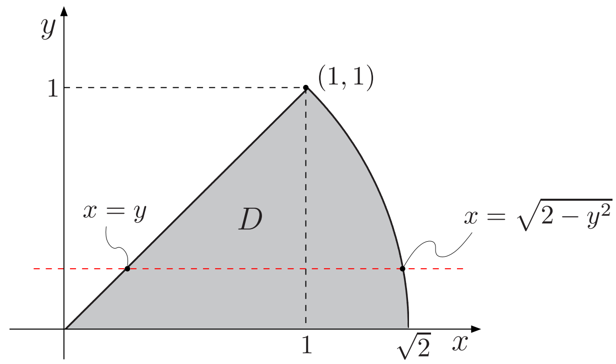
c) Calcule a integral dupla para a função $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$.

Solução:

a) Temos $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ com $D=D_1\cup D_2$, onde $D_1=\{(x,y);\ 0\leq x\leq 1\,,\,0\leq y\leq x\}$ e $D_2=\{(x,y);\ 1\leq x\leq\sqrt{2}\,,\,0\leq y\leq\sqrt{2-x^2}\}$. Os esboços de D_1 e D_2 são:



Logo, o esboço de D está representado na figura que se segue.



b) Enquadrando D como tipo II, temos $D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \end{cases}$. Então:

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dxdy\,.$$

c) Expressando D como coordenadas polares, temos $D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$. Então:

$$I = \iint\limits_{D_{r\theta}} \ln\left(1+r^2\right) r\, drd\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+r^2\right) r\, d\theta dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \ln\left(1+r^2\right) r\, dr\,.$$

Fazendo $y = 1 + r^2$, temos $dy = 2r\, dr$, donde $r\, dr = \dfrac{dy}{2}$. Para $r = 0$, temos $y = 1$ e para $r = \sqrt{2}$ temos $y = 3$. Então:

$$I = \frac{\pi}{4} \int_1^3 \ln y \, \frac{dy}{2} = \frac{\pi}{8} \int_1^3 \ln y \, dy\,.$$

Aplicando integração por partes, temos:

$$u = \ln y\,,\ dv = dy \ \Rightarrow\ du = \frac{1}{y}\, dy\,,\ v = y\,.$$

Como $\displaystyle\int u\, dv = uv - \int v\, du$, então:

$$I = \frac{\pi}{8} \left[y \ln y \Big|_1^3 - \int_1^3 y \cdot \frac{1}{y}\, dy \right] = \frac{\pi}{8} \left(3 \ln 3 - \ln 1 - \int_1^3 dy \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(3 \ln 3 - y \Big|_1^3 \right)$$

ou

$$I = \frac{\pi}{8}\left(3 \ln 3 - 2\right)\,.$$

Exercício 7: Passe para coordenadas polares e calcule:

a) $I = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy\ dxdy$

b) $I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dydx,\ a>0$

Solução:

a) A integral I está definida sobre a região D descrita pelas desigualdades $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2} \end{cases}$.
Observe que D está descrita como uma região do tipo II. Examinemos a fronteira da esquerda de D:

$$x = 1-\sqrt{1-y^2}\ ,\ 0 \leq y \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x-1 = -\sqrt{1-y^2}\ ,\ 0 \leq y \leq 1 (\therefore x \leq 1)\,.$$

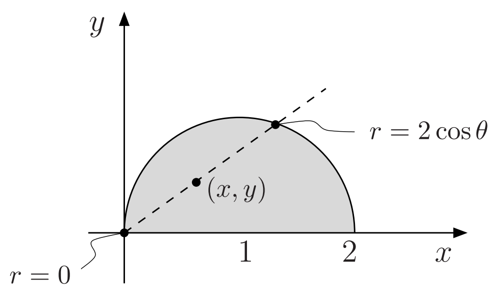
Elevando ao quadrado, tem-se:

$$(x-1)^2 = 1-y^2,\ 0 \leq y \leq 1 \text{ e } x \leq 1$$

o que implica

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq y \leq 1 \text{ e } x \leq 1\,.$$

Então a fronteira da esquerda é a parte da circunferência $(x-1)^2+y^2=1$ com $0 \leq y \leq 1$ e $x \leq 1$. Examinando a fronteira da direita, temos que consiste da parte da mesma circunferência com $0 \leq y \leq 1$ e $x \geq 1$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Portanto D se transforma em:

$$D_{r\theta} = \left\{(r,\theta);\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\right\}.$$

Temos:

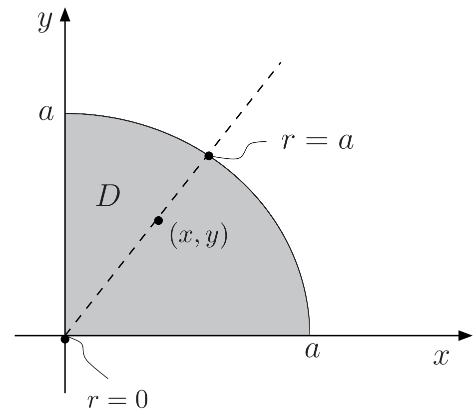
$$I = \iint_{D_{r\theta}} r\cos\theta r \operatorname{sen}\theta r\ drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ drd\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \operatorname{sen}\theta\ d\theta = -4\frac{\cos^6\theta}{6}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$

b) A integral I está definida sobre a região D descrita pelas desigualdades $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$
que é do tipo I. A fronteira superior de D é a curva $y = \sqrt{a^2-x^2}$ com $0 \leq x \leq a$ e $y \geq 0$ que corresponde à parte da circunferência $x^2+y^2=a^2$ com $0 \leq x \leq a$ e $y \geq 0$.

A fronteira inferior de D é o segmento de reta $y = 0$ com $0 \leq x \leq a$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



O ponto $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \in D$ é tal que θ varia segundo $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e r varia segundo $0 \leq r \leq a$.

Portanto D se transforma em:

$$D_{r\theta} = \left\{(r,\theta);\ 0 \leq r \leq a\,,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2\right\}.$$

Então:

$$I = \iint\limits_{D_{r\theta}} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\,drd\theta = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\,d\theta dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^a \left(a^2 - r^2\right)^{1/2} r\,dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^a \left(a^2 - r^2\right)^{1/2} d\left(a^2 - r^2\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^a = -\frac{\pi}{6}\left(0 - a^3\right) = \frac{\pi a^3}{6}\,.$$

Exercício 8: A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, com $a > 0$. e a parte superior é a superfície do paraboloide $az = x^2 + y^2$. Calcule o volume do sólido.

Solução: Seja D o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ e seja $z = f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{a} \geq 0$, que é contínua em D. Então o volume do sólido W de base D e "teto" $z = f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{a}$ é dado por:

$$V(W) = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D \frac{x^2 + y^2}{a}\,dxdy = \frac{1}{a}\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy\,.$$

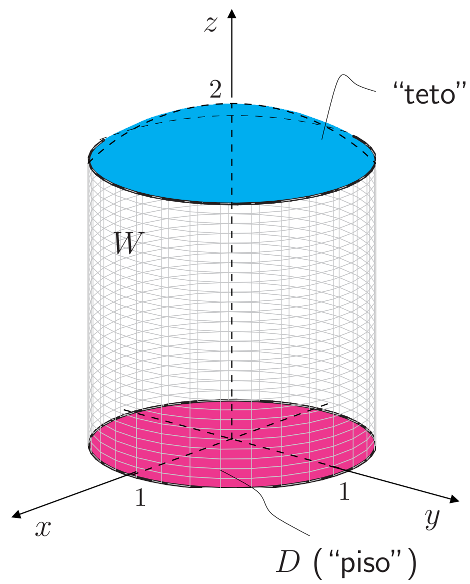
Passando para coordenadas polares, temos $(x^2 + y^2)\,dxdy = r^2 r\,drd\theta = r^3\,drd\theta$ e o disco D transforma-se em $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi/ \end{cases}$. Logo:

$$V(W) = \frac{1}{a}\iint\limits_{D_{r\theta}} r^3\,drd\theta = \frac{1}{a}\int_0^a r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \frac{2\pi}{a}\int_0^a r^3\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{a}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^3\pi}{2} \text{ u.v.}$$

Exercício 9: Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



Observemos que o "teto" do sólido W é uma porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, donde $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = f(x, y)$. O "piso" de W é o disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Então

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \\ x^2 + y^2 = & r^2 \end{cases}$$

O conjunto $D_{r\theta}$ é dado por: $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então:

$$V(W) = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{4 - r^2} \cdot r\,drd\theta = \int_0^1 \left(4 - r^2\right)^{1/2} r \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(4 - r^2\right)^{1/2} r\,dr\,.$$

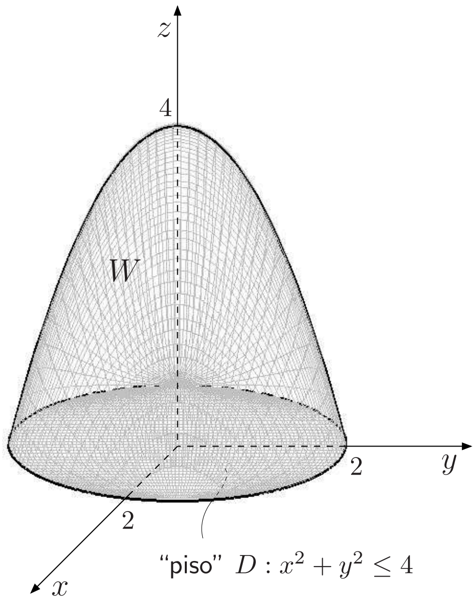
Temos $d(4 - r^2) = -2r\,dr$, donde $r\,dr = -\frac{1}{2} d(4 - r^2)$. Logo:

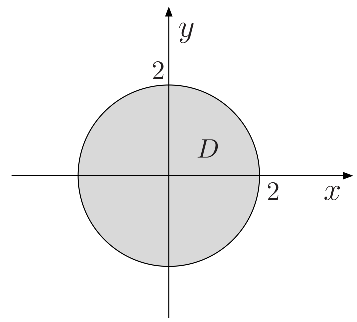
$$V(W) = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \left(4 - r^2\right)^{1/2} d(4 - r^2) =$$

$$= -\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\left(4 - r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{2\pi}{3}\left(3^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \quad \textit{u.v.}$$

Exercício 10: Determine o volume do sólido W limitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.





Temos:

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = r\ drd\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$. Então:

$$V(W) = \iint_{D_{r\theta}} \left(4 - r^2\right)\ r\ drd\theta = \int_0^2 \left(4r - r^3\right) \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \textit{ u.v.}$$