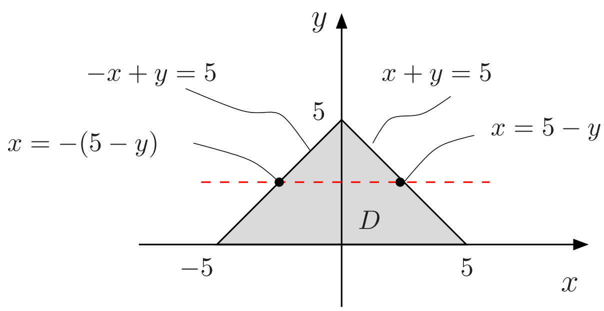
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 3

Exercício 1: Calcule as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centro de massa de uma chapa homogênea D com o formato de um triângulo isósceles, com base 10 cm e altura 5 cm.

Solução: Consideremos o eixo x passando pela base e o eixo y coincidindo com a mediatriz relativa à base do triângulo.



Como D é homogênea e é simétrica em relação ao eixo y, então pela observação 5, segue que $\overline{x} = 0$.

Temos

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y \, dxdy}{A(D)} \, ,$$

onde

$$A(D) = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25 \quad \textit{u.a.}$$

Como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \; 0 \leq y \leq 5 \, , \, -(5-y) \leq x \leq 5-y\}$, então,

$$\iint_D y \, dxdy = \int_0^5 \int_{-(5-y)}^{5-y} y \, dxdy = \int_0^5 y \left[x\right]_{-(5-y)}^{5-y} \, dy = 2 \int_0^5 y(5-y) \, dy =$$

$$= 2 \int_0^5 (5y - y^2) \, dy = 2 \left[\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^5 = \frac{125}{3} \, .$$

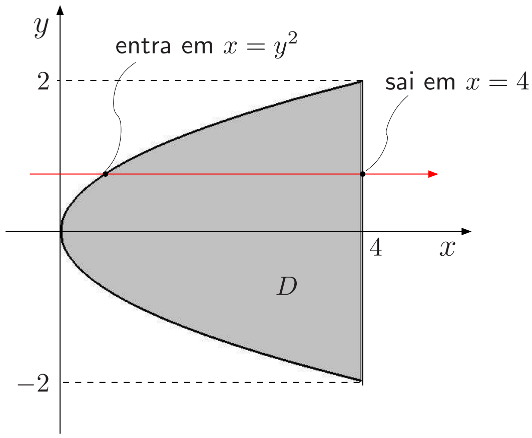
Logo,

$$\overline{y} = \frac{\frac{125}{3}}{25} = \frac{5}{3} \, .$$

Assim, o centro de massa situa-se a $\dfrac{5}{3}$ cm da base, sobre sua mediatriz.

Exercício 2: Calcule a massa total M, o centro da massa $(\overline{x}, \overline{y})$ da lâmina que tem a forma da região D limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$ e que tem densidade $\delta(x, y) = x$.

Solução: O esboço da lâmina D está representado na figura que se segue.



O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é dado por:

$$M\overline{x} = \iint_D x\delta(x, y)\, dA = \iint_D x^2\, dA$$

$$M\overline{y} = \iint_D y\delta(x, y)\, dA = \iint_D xy\, dA$$

Como a região D tem simetria em relação ao eixo x e a função $f(x, y) = xy$ é ímpar na variável y então,

$$\iint_D xy\, dA = 0\,.$$

Logo, $\overline{y} = 0$

Cálculo de M

Temos,

$$M = \iint_D \delta(x, y)\, dA = \iint_D x\, dA$$

onde $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \leq y \leq 2\,,\ y^2 \leq x \leq 4\}$. Logo,

$$M = \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} x\, dxdy = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{4} dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - y^4\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[16y - \frac{y^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2} \left[\left(32 - \frac{32}{5}\right) - \left(-32 + \frac{32}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{128}{5}\,.$$

Cálculo de $\iint_D x^2\, dA$

Temos,

$$\iint_D x^2\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x^2\, dxdy = \int_{-2}^{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y^2}^{4} dy = \frac{1}{1}\int_{-2}^{2}\left(64-y^6\right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left[64y - \frac{y^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\cdot 2\left(128 - \frac{128}{7}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 128}{7} = \frac{4\cdot 128}{7}\,.$$

Portanto,

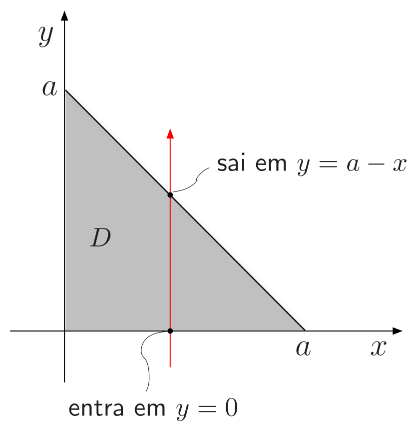
$$\frac{128}{5}\cdot\overline{x} = \frac{4\cdot 128}{7}$$

portanto $\overline{x} = 20/7$.

Assim, o centro da massa está sobre o eixo x em $(20/7, 0)$.

Exercício 3: Sendo a densidade δ constante, calcule o momento de inércia I_x da lâmina triangular, limitada pela reta $x+y=a$ e os eixos $x=0$ e $y=0$.

Solução: O esboço de D está representado na figura que se segue.



O momento de inércia I_x da lâmina é dado por:

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)\, dA = \delta\iint_D y^2\, dA$$

onde $D : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le a\,,\, 0\le y\le a-x\}$. Então,

$$I_x = \delta\int_0^a\int_0^{a-x} y^2\, dydx = \delta\int_0^a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} dx = \frac{\delta}{3}\int_0^a (a-x)^3 dx\,.$$

Fazendo $u = a-x$ temos $du = -dx$. Para $x=0$ temos $u=a$ e para $x=a$ temos $u=0$. Então,

$$I_x = \frac{\delta}{3}\int_a^0 u^3(-du) = \frac{-\delta}{3}\int_a^0 u^3\, du = \frac{\delta}{3}\int_0^a u^3\, du = \frac{\delta}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^a = \frac{\delta a^4}{12}\,.$$

Como $\delta(x,y) = \delta$, então a massa total é:

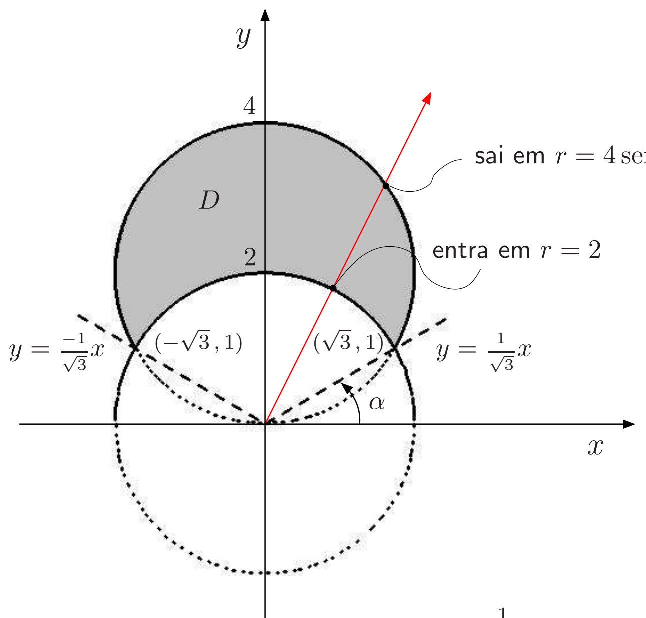
$$M = \delta A(D) = \delta\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a = \frac{\delta a^2}{2}\,.$$

Assim,

$$I_x = \frac{\delta a^4}{12} = \frac{\delta a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{Ma^2}{6} \,.$$

Exercício 4: Uma lâmina delgada tem a forma da região D que é interior à circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Calcule a massa da lâmina se a densidade é dada por $\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

Solução: De $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ou $x^2 + y^2 = 4y$ e $x^2 + y^2 = 4$ temos que $4y = 4$ portanto $y = 1$ e $x = \pm\sqrt{3}$. Logo, as circunferências se interceptam em $(\sqrt{3}\,, 1)$ e $(-\sqrt{3}\,, 1)$.



$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ rad

A massa da lâmina D é

$$M = \iint_D \delta(x, y)\, dA = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)^{-1/2} dA \,.$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ dxdy = r\ drd\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

A equação $x^2 + y^2 = 4y$ transforma-se em $r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta$ portanto $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir da reta $y = 1/\sqrt{3}\,x$ onde $\theta = \pi/6$ até a reta $y = -1/\sqrt{3}\,x$ onde $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ vemos que θ varia de $\pi/6$ até $5\pi/6$. Por um ponto P no interior de D consideremos a semirreta OP. Ela entra em D em $r = 2$ e sai de D em um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 4y$ onde $r = 4 \operatorname{sen} \theta$. Então, r varia de 2 a $4 \operatorname{sen} \theta$. Logo, $D_{r\theta} : \begin{cases} \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6 \\ 2 \leq r \leq 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$. Assim,

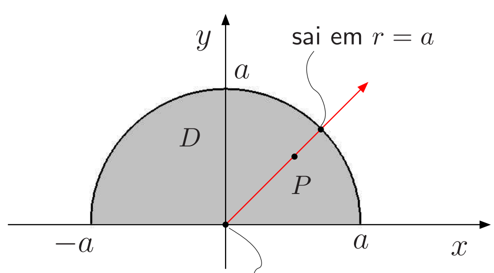
$$M = \iint_{D_{r\theta}} \left(r^2\right)^{-1/2} r \, drd\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4 \operatorname{sen} \theta} drd\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (4 \operatorname{sen} \theta - 2) d\theta =$$

$$= \Big[-4 \cos \theta - 2\theta \Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \left(-4 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} \right) - \left(-4 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\pi}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \text{ u.m.}$$

Exercício 5: Uma lâmina tem a forma de um semidisco D de raio a. A densidade superficial no ponto P é proporcional à distância do ponto ao centro do disco. Determine o valor da constante de proporcionalidade se a massa do semidisco é igual a πa^3 *u.m.*

Solução: Sem perda de generalidade podemos considerar o semidisco centrado na origem e ocupando os primeiro e segundo quadrantes. Logo, temos $D : x^2 + y^2 \leq a^2$, com $y \geq 0$.



Como a distância de (x, y) à origem é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$ então a densidade é dada por $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. A massa M de D é dada por:

$$M = \iint_D \delta(x, y) \, dA = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \, .$$

Passando para coordenadas polares temos,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ dxdy = r \, drd\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo onde $\theta = 0$ até o eixo x negativo onde $\theta = \pi$ vemos que θ varia de 0 até π. Por um ponto P no interior de D

consideremos a semirreta OP. Ela entra em D em $r=0$ e sai de D em $r=a$. Então, r varia de 0 a a. Logo $D_{r\theta}:\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le r\le a\end{cases}$. Assim,

$$M=k\iint\limits_{D_{r\theta}}\sqrt{r}\ r\ drd\theta=k\int_0^a r^2\int_0^\pi d\theta dr=k\pi\int_0^a r^2\ dr=$$
$$=k\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a=\frac{k\pi a^3}{3}$$

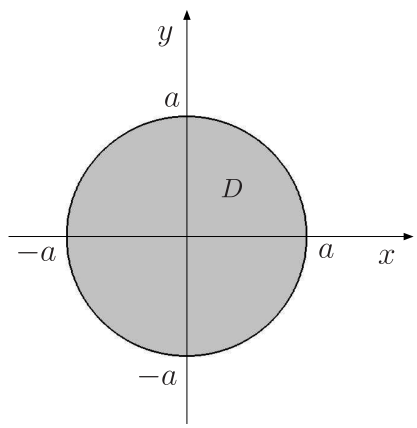
mas $M=\pi a^3$ *u.m.* Então $\dfrac{k\pi a^3}{3}=\pi a^3$ portanto $k=3$.

Exercício 6: Calcule o momento de inércia em relação à origem da chapa

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le a^2\right\}$$

se a densidade superficial é $\delta(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, com $k>0$.

Solução: O esboço da chapa D está representado na figura que se segue.



O momento de inércia em relação à origem é dado por:

$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y)\ dA=k\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\ dA\,.$$

Passando para coordenadas polares temos,

$$I_0=k\iint\limits_{D_{r\theta}}r^2\sqrt{r^2}\ r\ drd\theta=k\iint\limits_{D_{r\theta}}r^4\ drd\theta$$

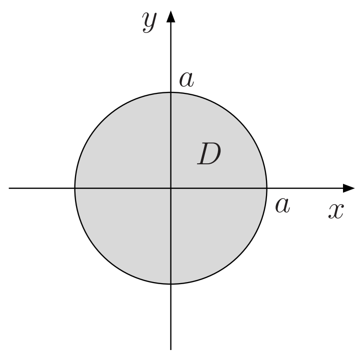
onde $D_{r\theta}$ é dado pelas desigualdades $0\le r\le a$ e $0\le\theta\le 2\pi$. Assim,

$$I_0=k\int_0^a r^4\int_0^{2\pi}d\theta dr=2k\pi\int_0^a r^4\ dr=2k\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a=\frac{2k\pi a^5}{5}\,.$$

Exercício 7: Mostre que o momento de inércia de um disco circular homogêneo de raio a em relação a uma reta ao longo de um diâmetro é igual a $\dfrac{Ma^2}{4}$, onde M é a massa do disco.

Solução: Introduzindo um sistema de coordenadas conforme a figura que se segue, o momento de inércia em relação ao eixo x, que contém um diâmetro, é dado por:

$$I_x = \iint_D y^2 k \, dxdy = k \iint_D y^2 \, dxdy \, .$$



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ dxdy &= r dr d\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta}$ é dado por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Então,

$$I_x = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta r \, dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen}^2 \theta \, dr d\theta =$$

$$= k \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta dr = k \int_0^a r^3 \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} dr =$$

$$= k\pi \int_0^a r^3 \, dr = k\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{k\pi a^4}{4} \, .$$

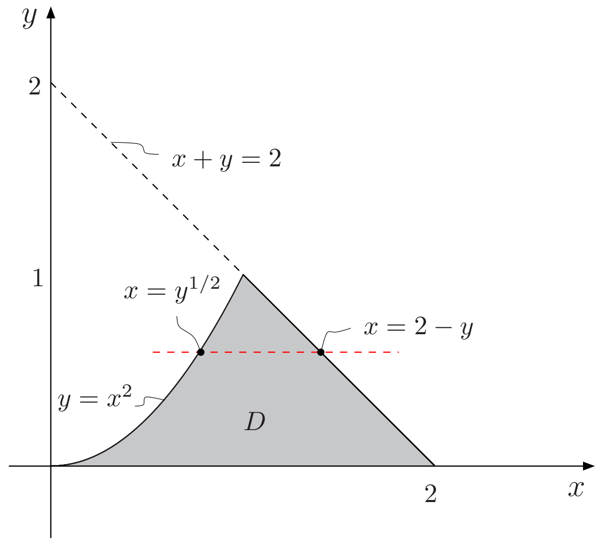
Como D é homogêneo, então $M = kA(D)$. Logo,

$$M = k\pi a^2 \, .$$

Então,

$$I_x = k\pi a^2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{Ma^2}{4} \, .$$

Exercício 8: Calcule o centroide da região limitada pelas curvas $y = x^2$, $x + y = 2$ e $y = 0$.



Solução:

Note que D é do tipo II, pois $0 \leq y \leq 1$ e $y^{1/2} \leq x \leq 2-y$. O centroide $(\overline{x},\overline{y})$ é dado por:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\ dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\ dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}\,.$$

Temos,

$$\iint_D dxdy = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{2-y} dxdy = \int_0^1 \left(2-y-y^{1/2}\right)\ dy =$$

$$= \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12-3-4}{6} = \frac{5}{6}\,.$$

$$\iint_D x\ dxdy = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{2-y} x\ dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^{1/2}}^{2-y} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - 4y + y^2 - y\right)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - 5y + y^2\right)\ dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left[4y - \frac{5y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{24-15+2}{6} = \frac{11}{12}\,.$$

$$\iint_D y\ dxdy = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{2-y} y\ dxdy = \int_0^1 y\left(2 - y - y^{1/2}\right)\ dy =$$
$$= \int_0^1 \left(2y - y^2 - y^{3/2}\right)\ dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} =$$
$$= \frac{15-5-6}{15} = \frac{4}{15}\,.$$

Logo,

$$\overline{x} = \frac{11/12}{5/6} = \frac{11}{10}$$
$$\overline{y} = \frac{4/15}{5/6} = \frac{8}{25}$$

portanto

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{11}{10}\,,\frac{8}{25}\right)\,.$$

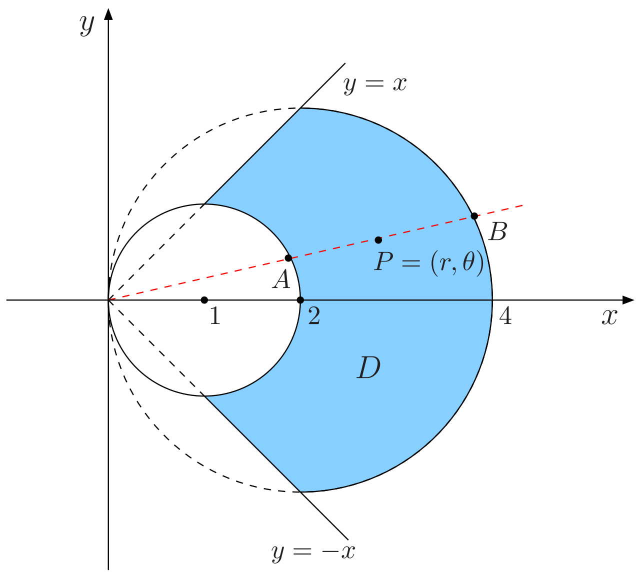
Exercício 9: Seja uma lâmina delgada representada pela região D, determinada por $y \leq x$, $y \geq -x$, $x^2 + y^2 \geq 2x$ e $x^2 + y^2 \leq 4x$. Se a densidade em cada ponto $P = (x,y)$ da lâmina é dada por $\delta\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, determine:

a) a massa de D;

b) o momento de inércia polar em relação à origem.

Solução:

a) Completando o quadrado em $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$, temos $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Logo, o esboço de D está representado na figura que se segue.



A massa M é dada por:

$$M = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy\,.$$

Vamos usar coordenadas polares para descrever a região D. Temos,

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}$$

Logo, $x^2+y^2 = 2x$ e $x^2+y^2 = 4x$ acarretam em $r^2 = 2r\cos\theta$ e $r^2 = 4r\cos\theta$, e para $r \neq 0$, obtemos $r = 2\cos\theta$ e $r = 4\cos\theta$. Para descrever D, consideramos um ponto $P = (x,y) = (r,\theta) \in D$. A semirreta OP intercepta a fronteira de D em $A = (r_1(\theta),\theta)$ e $B = (r_2(\theta),\theta)$, onde $r_1(\theta) = 2\cos\theta$ e $r_2(\theta) = 4\cos\theta$. Logo, $2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta$.

As retas $y = x$ e $y = -x$ acarretam em $r\,\mathrm{sen}\,\theta = r\cos\theta$ e $r\,\mathrm{sen}\,\theta = -r\cos\theta$ ou $\mathrm{tg}\,\theta = 1$ e $\mathrm{tg}\,\theta = -1$, portanto $\theta = \pi/4$ e $\theta = -\pi/4$, respectivamente. Logo, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. Assim,

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\,,\, 2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta\right\}\ .$$

Então,

$$M = \iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r\, drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} drd\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} drd\theta =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos\theta\, d\theta = \Big[2\,\mathrm{sen}\,\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \textit{u.m.}$$

b) Temos,

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\delta(x,y)\,dA = \iint_D \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA =$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2}\cdot r\,drd\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^2\,drd\theta =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(64\cos^3\theta - 8\cos^3\theta\right)\,d\theta =$$

$$= \frac{56}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{56}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{56}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{56}{3}\cdot 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{112}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{112}{3}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{140\sqrt{2}}{9}\,.$$

Exercício 10: Calcule a massa de uma chapa D, limitada pelas curvas $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, sabendo que a densidade de massa em um ponto é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.

Solução: Primeiro vamos encontrar as interseções das curvas, isto é, as interseções de $y=x$ com as circunferências.

$$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1\,.$$

Logo, as interseções são $(0,0)$ e $(1,1)$.

$$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\,.$$

Logo, as interseções são $(0,0)$ e $(2,2)$.

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\,.$$

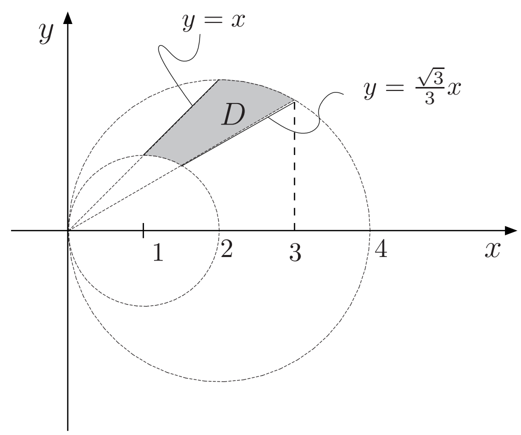
Logo, as interseções são $(0,0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2+y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} = 4x \Leftrightarrow 4x^2 = 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3\,.$$

Logo, as interseções são $(0,0)$ e $\left(3, \sqrt{3}\right)$.

De $x^2+y^2=2x$ e $x^2+y^2=4x$, temos respectivamente, $(x-1)^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=4$. Levando em conta essas informações, esboçamos a região D.



A distância de $(x,y) \in D$ à origem é $\sqrt{x^2+y^2}$. Como a densidade é inversamente proporcional a distância de (x,y) à origem, então $\delta(x,y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, onde $k>0$ é a constante de proporcionalidade. Como $M = \displaystyle\iint_D \delta(x,y)\,dA$, então $M = k \displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$.

Passando para coordenadas polares, obtemos,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &=& rdrd\theta \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right.$$

Temos,

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2=2x & \Rightarrow & r^2 = 2r\cos\theta \overset{r\neq 0}{\Rightarrow} r = 2\cos\theta \\ x^2+y^2=4x & \Rightarrow & r^2 = 4r\cos\theta \overset{r\neq 0}{\Rightarrow} r = 4\cos\theta \\ y = x & \Rightarrow & \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}x}{3} & \Rightarrow & \theta = \dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

Então o conjunto $D_{r\theta}$ é dado por $D_{r\theta}: \left\{\begin{array}{c} \pi/6 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta \end{array}\right.$. Logo,

$$M = k\iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r\,drd\theta = k\iint_{D_{r\theta}} drd\theta = k\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} drd\theta =$$

$$= 2k\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta = 2k\Big[\mathrm{sen}\,\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} = 2k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right) = k\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \textit{u.m.}$$