



Cálculo III-A – Lista 4

Exercício 1: Seja a integral iterada

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx.$$

- Esboce o sólido W cujo volume é dado pela integral I .
- Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral I .

Solução:

a) Temos que

$$I = \iiint_W dx dy dz$$

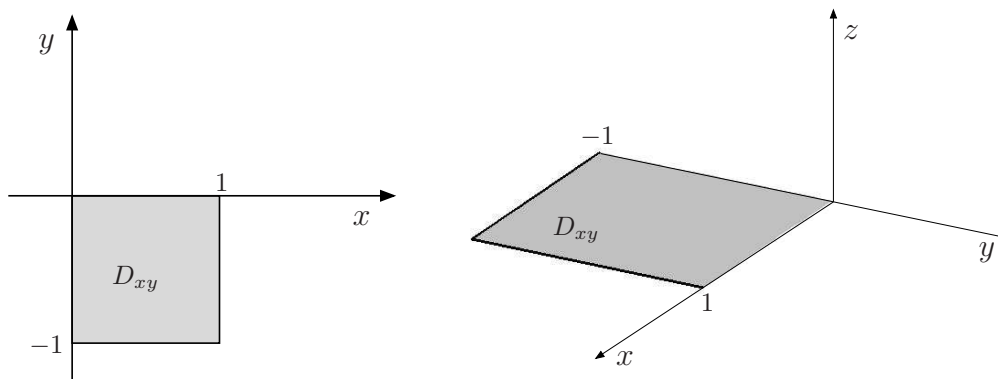
com

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \leq z \leq y^2\}$$

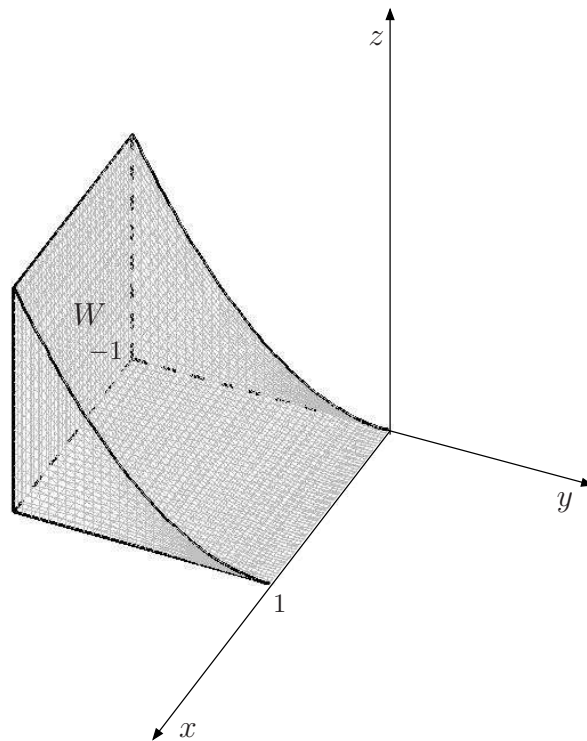
onde

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 0\}.$$

O esboço de D_{xy} , que representa a projeção do sólido W no plano xy está representado na figura que se segue.



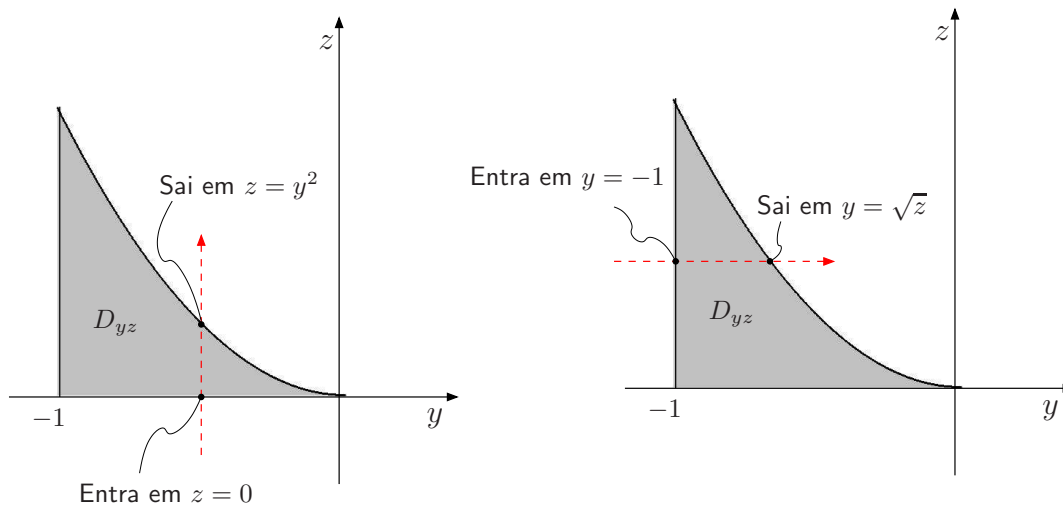
Consideremos a porção da superfície $z = y^2$, dita cilindro parabólico, que se projeta em D_{xy} . Considerando que z varia de 0 a y^2 , obtemos o esboço de W na figura que se segue.



b) Como D_{xy} é um retângulo então

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^{y^2} dz dx dy.$$

Projetando W sobre o plano yz , encontramos D_{yz} que é esboçado na figura que se segue.



Temos

$$D_{yz} = \{(y, z); -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq y^2\}$$

ou

$$D_{yz} = \{(y, z); 0 \leq z \leq 1, -1 \leq y \leq \sqrt{z}\}.$$

Considerando um ponto $P = (x, y, z)$ no interior de W e uma reta paralela ao eixo x , passando por P , orientada no sentido do crescimento de x , vemos que ela entra em W em $x = 0$ e sai de W em $x = 1$. Então $0 \leq x \leq 1$. Assim,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}.$$

Logo

$$I = \iiint_{D_{yz}} \int_0^1 dx dy dz.$$

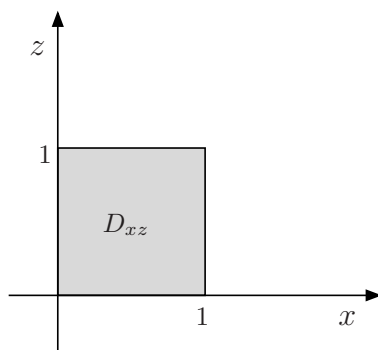
portanto

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \int_0^1 dx dz dy$$

ou

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} \int_0^1 dx dy dz.$$

Finalmente, projetando W sobre o plano xz encontramos o quadrado D_{xz} na figura que se segue.



Considerando um ponto $P = (x, y, z)$ no interior de W e por P uma reta paralela ao eixo y , orientada no sentido do crescimento de y , vemos que ela entra em W em $y = -1$ e sai de W em $y = \sqrt{z}$. Logo, $-1 \leq y \leq \sqrt{z}$. Então,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in D_{xz} \text{ e } -1 \leq y \leq \sqrt{z}\}.$$

Logo

$$I = \iiint_{D_{xz}} \int_{-1}^{\sqrt{z}} dy dx dz.$$

portanto

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} dy dx dz$$

OU

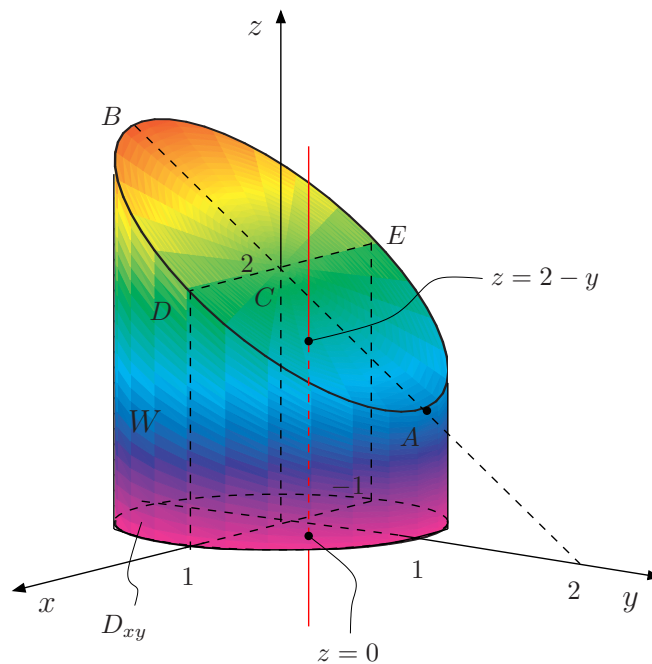
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{\sqrt{z}} dydzdx.$$

Exercício 2: Seja o sólido W limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z + y = 2$ e $z = 0$.

- Esboce W .
- Calcule a massa de W , supondo que a densidade em (x, y, z) é dada por $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

a) Inicialmente, traçamos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Em seguida, traçamos no plano yz , a reta $y + z = 2$, que intercepta o cilindro em A e B . Pelo ponto $C = (0, 0, 2)$ da reta, traçamos uma paralela ao eixo x , que intercepta o cilindro em D e E . Ligando os pontos A , B , D e E , obtemos a curva interseção do cilindro com o plano. Assim, temos o sólido W .



b) Temos

$$W = \{(x, y, z); (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq 2 - y\}$$

onde D_{xy} é dado por $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$. Temos,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W \delta(x, y, z) dV = \iiint_W z dV = \iint_{D_{xy}} \left[\int_0^{2-y} z dz \right] dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2-y} dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (4 - 4y + y^2) dy. \end{aligned}$$

Aplicando coordenadas polares, temos,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \iint_{D_{r\theta}} (4 - 4r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - 4r^2 \sin \theta + r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{4r^3}{3} \sin \theta + \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_0^1 d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[2 - \frac{4}{3} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[2\theta + \frac{4}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{17\pi}{8} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

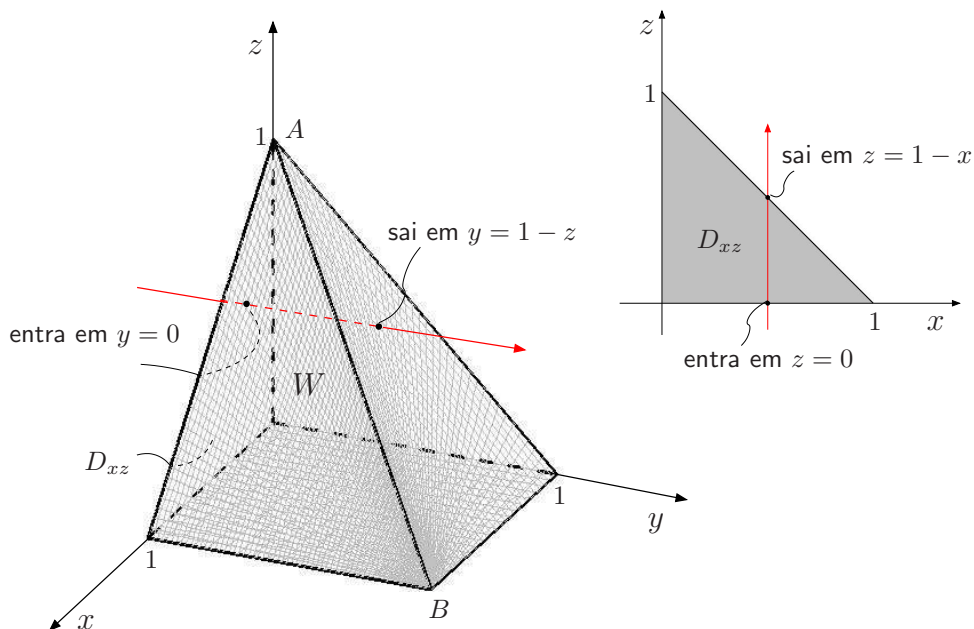
Exercício 3: Calcule a massa do sólido W limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$, sendo a densidade $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

Esboço do sólido W

Para esboçar o plano $y + z = 1$, traçamos inicialmente a reta $y + z = 1$ no plano yz . Como a equação não depende da variável x então por pontos da reta traçamos retas paralelas ao eixo x . Analogamente, esboçamos o plano $x + z = 1$. Observemos que os pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$

são comuns aos dois planos. Ligando-os por uma reta, obtemos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelos planos coordenados, temos assim o esboço na figura que se segue.



Devemos projetar W no plano xz ou no plano yz , pois para projetar W no plano xy devemos dividir W em duas partes, usando o plano $y = x$. Então, projetemos W no plano xz . Imaginando através de W uma reta paralela ao eixo y , orientada como o eixo y , vemos que ela entra em W em $y = 0$ e sai de W em $y = 1 - z$. Portanto:

$$W : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - z\}$$

com $D_{xz} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{cases}$. A massa M do sólido W é:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W \delta(x, y, z) \, dV = \iiint_W z \, dV = \iint_{D_{xz}} z \int_0^{1-z} dy \, dx \, dz = \\ &= \iint_{D_{xz}} z(1-z) \, dx \, dz = \iint_{D_{xz}} (z - z^2) \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} (z - z^2) \, dz = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $u = 1 - x$ temos $dx = -du$. Para $x = 0$ temos $u = 1$ e para $x = 1$ temos $u = 0$. Então,

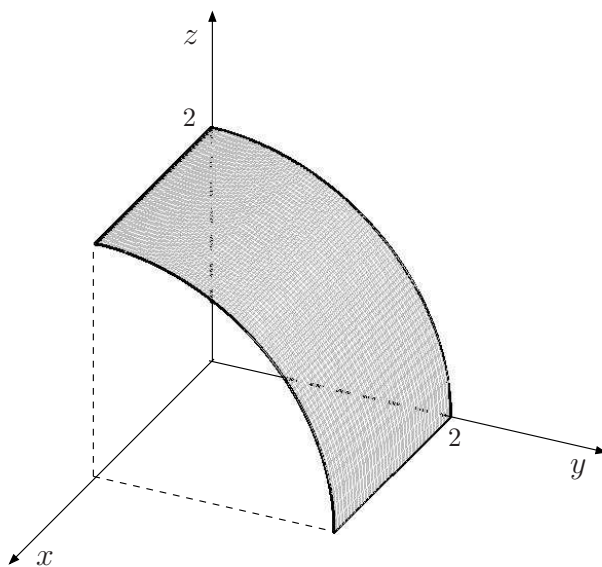
$$\begin{aligned} M &= \int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) (-du) = - \int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) du = \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) du = \\ &= \left[\frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Exercício 4: Use uma integral tripla para encontrar o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos gráficos das equações $y^2 + z^2 = 4$, $x + y = 2$, $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$.

Solução:

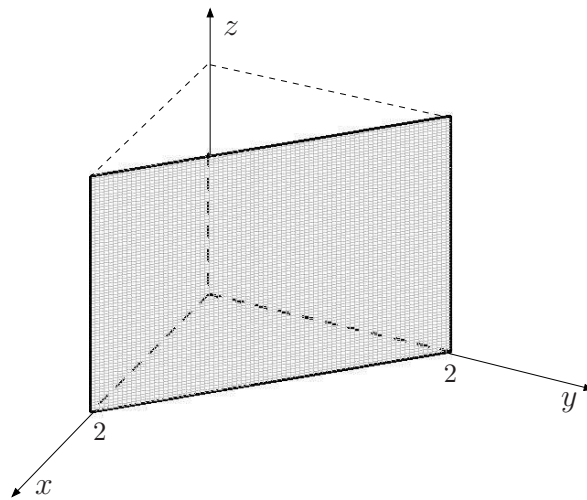
Esboço da superfície $y^2 + z^2 = 4$ (cilindro circular) com $x, y, z \geq 0$

No plano yz traçamos o arco da circunferência $y^2 + z^2 = 4$ com $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Como esta equação não depende da variável x , então por pontos do arco tracemos semirretas paralelas ao eixo x , com $x \geq 0$.



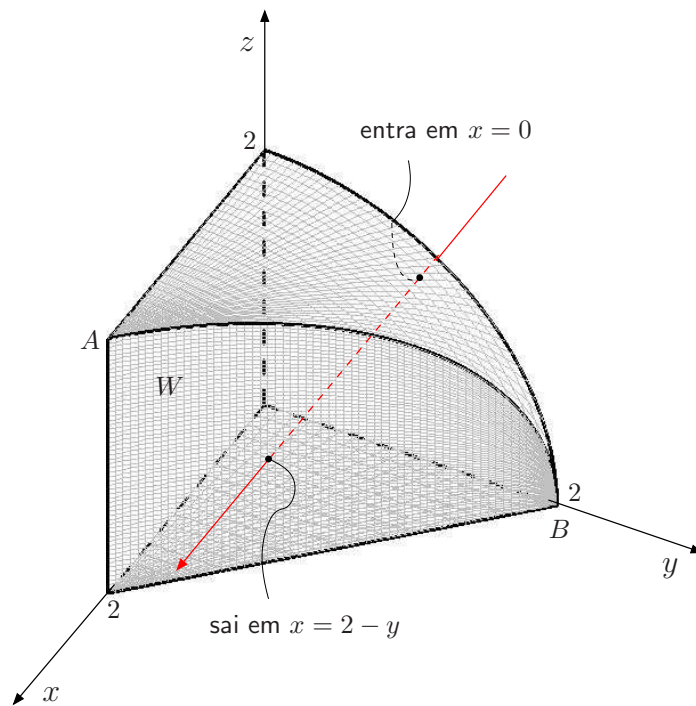
Esboço da superfície $x + y = 2$ (plano) com $x, y, z \geq 0$

No plano xy traçamos a reta $x + y = 2$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Como esta equação não depende da variável z , então por pontos dos segmentos da reta tracemos paralelas ao eixo z , com $z \geq 0$.



Esboço do sólido W

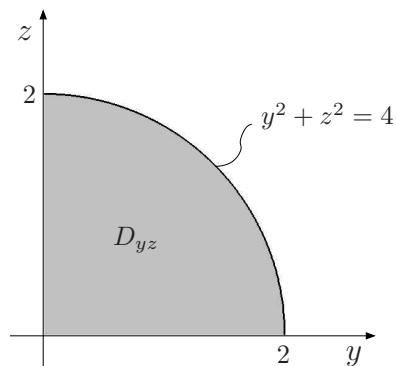
Observemos que o ponto $A = (2, 0, 2)$ e $B = (0, 2, 0)$ são comuns às duas superfícies. Ligando-os por uma curva temos a interseção. Considerando que o sólido é também limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W na figura que se segue.



Temos que:

$$V(W) = \iiint_W dV.$$

Para calcular a integral, vamos projetar o sólido no plano yz .



Imaginemos uma reta paralela ao eixo x através de W , orientada como o eixo x . Vemos que ela entra em W em $x = 0$ e sai de W em $x = 2 - y$. Então temos:

$$W : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \leq x \leq 2 - y\} .$$

Assim,

$$V(W) = \iiint_{D_{yz}} \int_0^{2-y} dx dy dz = \iint_{D_{yz}} (2 - y) dy dz .$$

Calculemos a integral utilizando coordenadas polares.

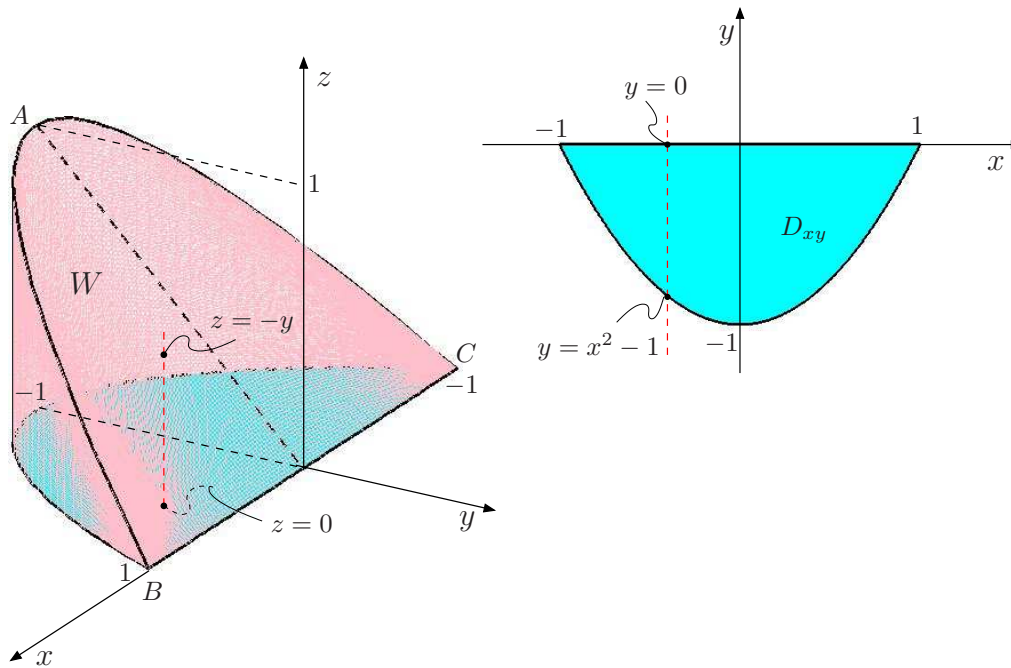
$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ dy dz = r dr d\theta \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iint_{D_{r\theta}} (2 - r \cos \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r - r^2 \cos \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(4 - \frac{8}{3} \cos \theta \right) d\theta = \\ &= \left[4\theta - \frac{8}{3} \sin \theta \right]_0^{\pi/2} = \left(2\pi - \frac{8}{3} \right) \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W limitado pelas superfícies $z = -y$, $y = x^2 - 1$ e $z = 0$.

Solução: Primeiramente, esboçamos o cilindro parabólico $y = x^2 - 1$. Em seguida, desenhamos o plano bissetor $z = -y$, destacando alguns pontos comuns: $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ e $C = (-1, 0, 0)$. Ligamos esses pontos por uma curva que representa a interseção das duas superfícies. Considerando que o sólido é limitado pelo plano $z = 0$, temos o sólido W representado na figura que se segue.



Projetando W sobre o plano xy , encontramos a região $D_{xy} : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 0 \end{cases}$. Por um ponto (x, y, z) no interior de W , traçamos uma reta paralela ao eixo z . Essa reta intercepta a fronteira inferior de W no plano xy onde $z = 0$ e intercepta a fronteira superior no plano $z = -y$. Logo, $0 \leq z \leq -y$. Assim,

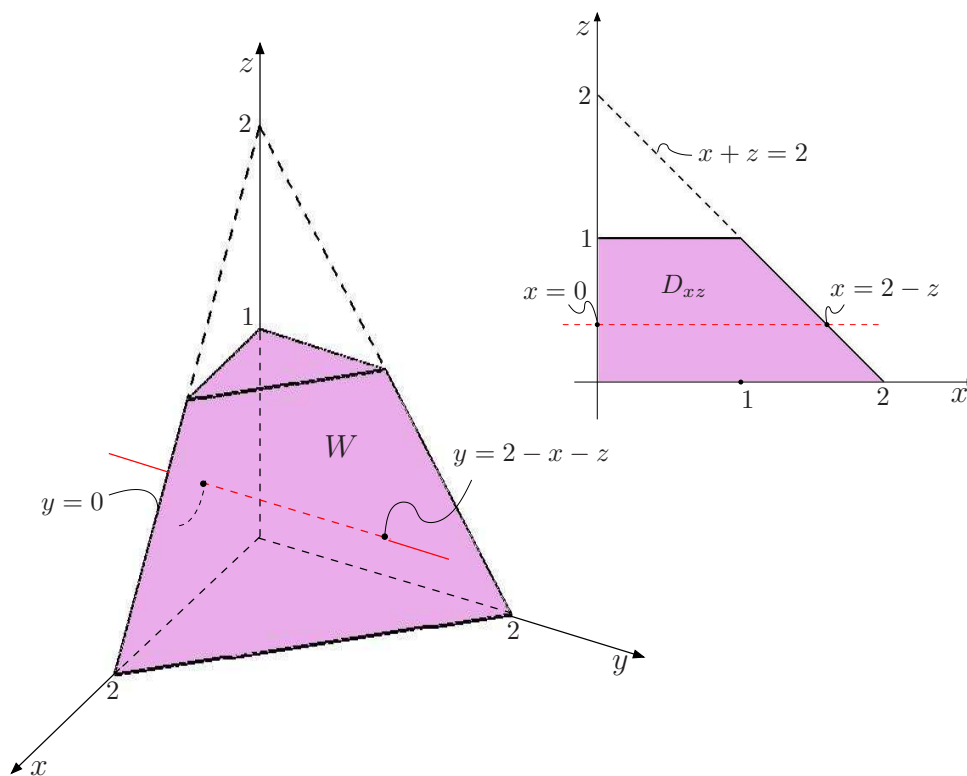
$$W = \{(x, y, z); (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq -y\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dV = \iint_{D_{xy}} \int_0^{-y} dz dx dy = \iint_{D_{xy}} (-y) dx dy = \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^0 y dy dx = - \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-1}^0 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 \right) = \frac{8}{15} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exercício 6: Calcule $\iiint_W 24z \, dx dy dz$, onde W é o sólido limitado por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1$.

Solução: Em primeiro lugar, traçamos o plano $x + y + z = 2$ e em seguida esboçamos o plano $z = 1$. Considerando que W é limitado pelos planos $x = 0$ e $y = 0$, temos o esboço de W na figura que se segue.



Projetando W sobre o plano xz temos a região $D_{xz} : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 - z \end{cases}$. Considerando uma paralela ao eixo y por um ponto (x, y, z) no interior de W , vemos que essa paralela intercepta a fronteira de W no plano xz onde $y = 0$ e depois no plano $x + y + z = 2$ onde $y = 2 - x - z$. Logo, $0 \leq y \leq 2 - x - z$. Assim,

$$W = \{(x, y, z); (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 2 - x - z\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \iiint_W 24z \, dV &= 24 \iint_{D_{xz}} \int_0^{2-x-z} z \, dy dx dz = 24 \iint_{D_{xz}} z(2-x-z) dx dz = \\ &= 24 \int_0^1 \int_0^{2-z} (2z - xz - z^2) dx dz = 24 \int_0^1 \left[2zx - \frac{x^2 z}{2} - z^2 x \right]_0^{2-z} dz = \end{aligned}$$

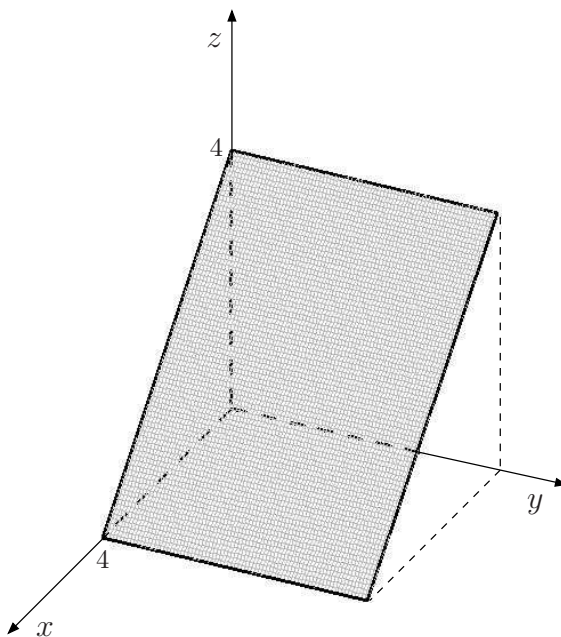
$$\begin{aligned}
 &= 24 \int_0^1 \left[2z(2-z) - \frac{(2-z)^2 z}{2} - z^2(2-z) \right] dz = \\
 &= 24 \int_0^1 \left(4z - 2z^2 - \frac{4z - 4z^2 + z^3}{2} - 2z^2 + z^3 \right) dz = \\
 &= 12 \int_0^1 (8z - 4z^2 - 4z + 4z^2 - z^3 - 4z^2 + 2z^3) dz = \\
 &= 12 \int_0^1 (4z - 4z^2 + z^3) dz = 12 \left[2z^2 - \frac{4z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \\
 &= 12 \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \right) = 11.
 \end{aligned}$$

Exercício 7: Encontre a massa e a coordenada \bar{z} do centro de massa do sólido W limitado pelos gráficos das equações $z = 4 - x$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $y = 4$ sendo a densidade $\delta(x, y, z) = kx$, onde $k > 0$ é uma constante.

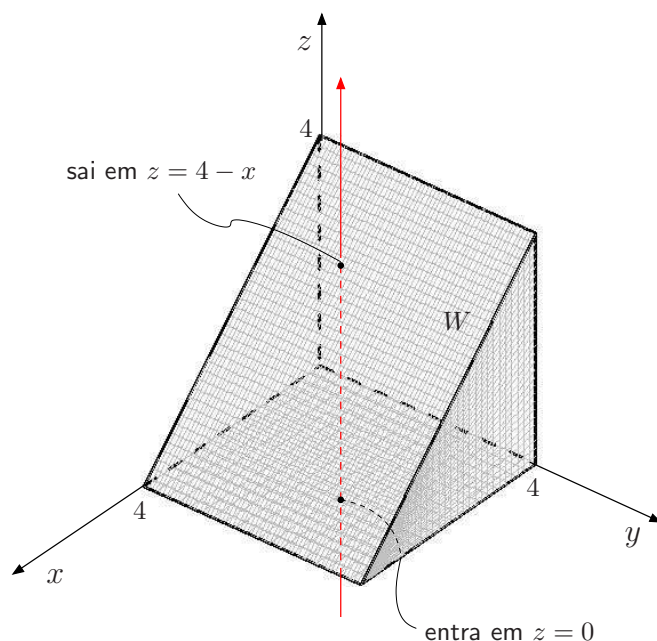
Solução:

Esboço do sólido W

No plano xz esboçamos a reta $x + z = 4$. Como esta equação não depende da variável y , então por pontos da reta traçamos retas paralelas ao eixo y .



Considerando que W é também limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $y = 4$ temos o sólido W na figura que se segue.



A massa de W é dada por

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dV = k \iiint_W x dV.$$

Para calcular a integral, devemos projetar W sobre algum plano coordenado. Vamos projetar W no plano xy . Encontramos o quadrado $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$. Imaginando uma reta paralela ao eixo z , através de W , orientada como o eixo z , vemos que ela entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = 4 - x$. Então,

$$W : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - x\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= k \iiint_{D_{xy}} \int_0^{4-x} x dz dx dy = k \iint_{D_{xy}} x(4-x) dx dy = \\ &= k \int_0^4 \int_0^4 (4x - x^2) dx dy = k \int_0^4 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 dy = \frac{32k}{3} \int_0^4 dy = \\ &= \frac{128k}{3} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

A componente \bar{z} é dada por:

$$M\bar{z} = \iiint_W z \delta(x, y, z) dV = k \iiint_W xz dV.$$

Cálculo de $\iiint_W xz dV$

Temos,

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} \int_0^{4-x} xz \, dz dx dy &= \iint_{D_{xy}} x \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-x} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} x(4-x^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 (16x - 8x^2 + x^3) \int_0^4 dy dx = 2 \int_0^4 (16x - 8x^2 + x^3) dx = \\ &= 2 \left[8x^2 - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 2 \left(8 \times 16 - \frac{8 \times 64}{3} + 64 \right) = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo acima, temos

$$\frac{128k}{3} \bar{z} = \frac{128k}{3}$$

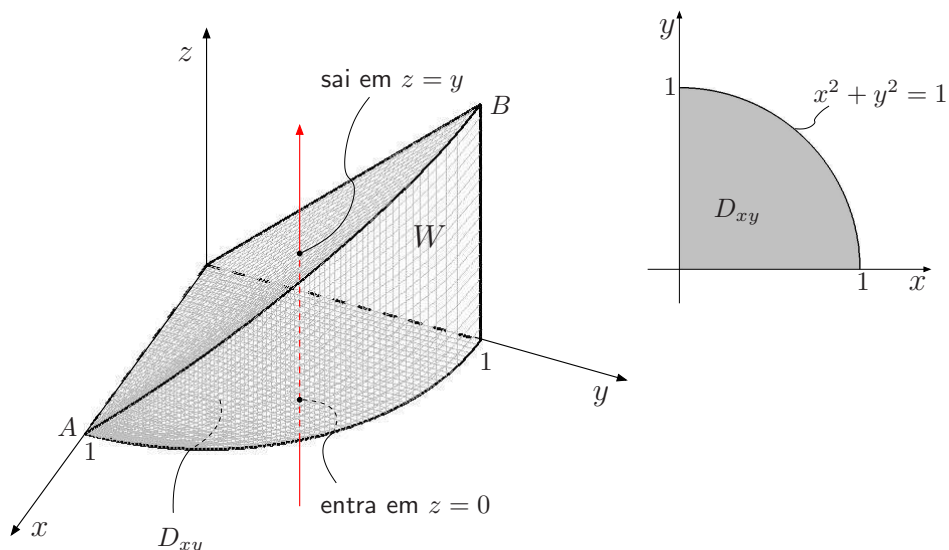
portanto $\bar{z} = 1$.

Exercício 8: Encontre o momento de inércia I_z do sólido no primeiro octante, limitado pelos gráficos das equações $z = y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $x = 0$ se a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = kz$, onde $k > 0$ é uma constante.

Solução:

Esboço do sólido W

No primeiro octante esboçamos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Em seguida, esboçamos o plano $z = y$, destacando alguns pontos comuns como $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$. Ligando-os por uma curva, temos a curva interseção. Considerando que o sólido é limitado pelos planos $z = 0$ e $x = 0$, temos o esboço de W na figura que se segue.



O momento de inércia I_z é dado por:

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV = k \iiint_W (x^2 + y^2) z dV.$$

Cálculo da integral

Projetando W no plano xy encontramos a região $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$ e $y \geq 0$. Imaginando uma reta paralela ao eixo z através de W , orientada como o eixo z , vemos que ela entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = y$. Então $0 \leq z \leq y$. Assim,

$$\begin{aligned} I_z &= k \iint_{D_{xy}} \int_0^y (x^2 + y^2) z dz dxdy = k \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^y dxdy = \\ &= \frac{k}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) y^2 dxdy. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r drd\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{k}{2} \iint_{D_{r\theta}} r^2 (r \sin \theta)^2 r drd\theta = \frac{k}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \int_0^1 r^5 drd\theta = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\theta = \frac{k}{12} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Da trigonometria temos que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$. Logo,

$$\int \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C.$$

Assim,

$$I_z = \frac{k}{12} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{k\pi}{48}.$$

Exercício 9: Seja W um sólido limitado pelas superfícies $z = y^2$, $z = 2 - y^2$, $x = 0$ e $x + z = 4$.

- Esboce W .
- Calcule o volume de W .

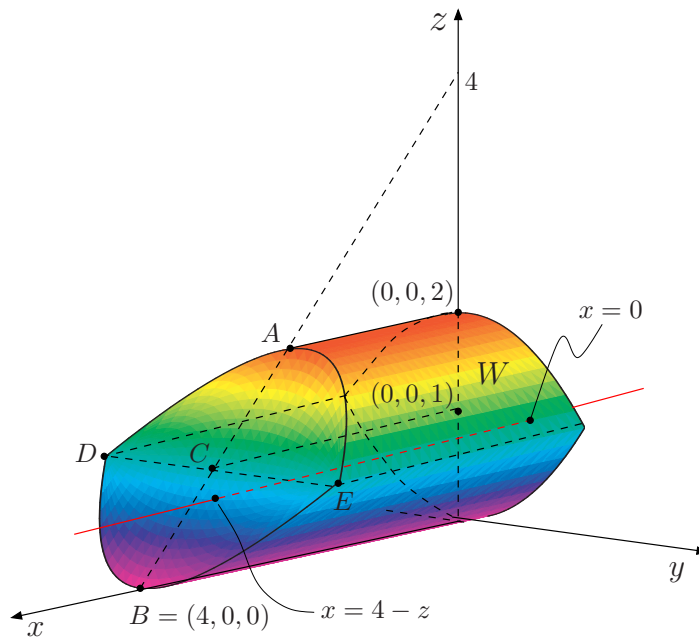
Solução:

a) Inicialmente, encontremos os pontos de interseção das duas parábolas:

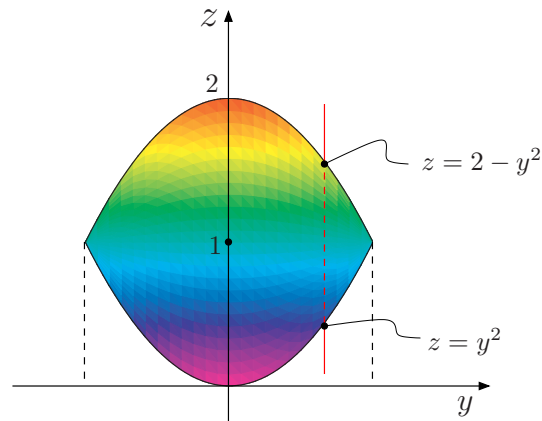
$$\begin{cases} z = y^2 \\ z = 2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 2 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

Por pontos das parábolas traçamos paralelas ao eixo x (por exemplo, $(0, 0, 2)$, $(0, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, 1, 1)$).

No plano xz , traçamos a reta $x + z = 4$, que intercepta as superfícies anteriores em A e B . Por $(0, 0, 1)$, traçamos uma paralela ao eixo x , que intercepta a reta em C . Por C , traçamos uma paralela ao eixo y , que intercepta as superfícies anteriores em D e E . Ligando A , E , B e D por uma curva fechada, obtemos o sólido W .



b) Projetando W sobre o plano yz encontramos D_{yz} .



Então descrevemos W por:

$$W = \{(x, y, z); (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \leq x \leq 4 - z\}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[\int_0^{4-z} dx \right] dy dz = \iint_{D_{yz}} (4 - z) dy dz = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} (4 - z) dz dy = \int_{-1}^1 \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_{y^2}^{2-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [8z - z^2]_{y^2}^{2-y^2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(16 - 8y^2 - 4 + 4y^2 - y^4) - (8y^2 - y^4)] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (12 - 12y^2) dy = \frac{1}{2} [12y - 4y^3]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot 2(12 - 4) = 8 \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exercício 10: Seja W o sólido limitado pelas superfícies $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$ e $z = 0$.

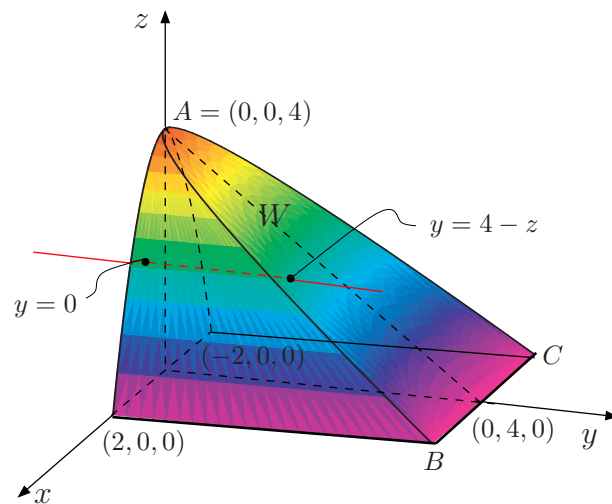
- Esboce W .
- Calcule, por integral tripla, o volume do sólido W .

Solução:

a) Para esboçar a superfície $z + x^2 = 4$ (dita cilindro parabólico), traçamos no plano $y = 0$, a parábola $z = 4 - x^2$. Como a equação não contém a variável y , então por pontos da parábola (por exemplo $A = (0, 0, 4)$, $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$) traçamos paralelas ao eixo y .

No plano $x = 0$, traçamos a reta $y + z = 4$, que intercepta o cilindro em $A = (0, 0, 4)$.

Para esboçar o plano, devemos traçar paralelas ao eixo x , por pontos da reta. Em particular, por $(0, 4, 0)$. Esta paralela intercepta o cilindro nos pontos B e C . A curva que passa por B , A e C



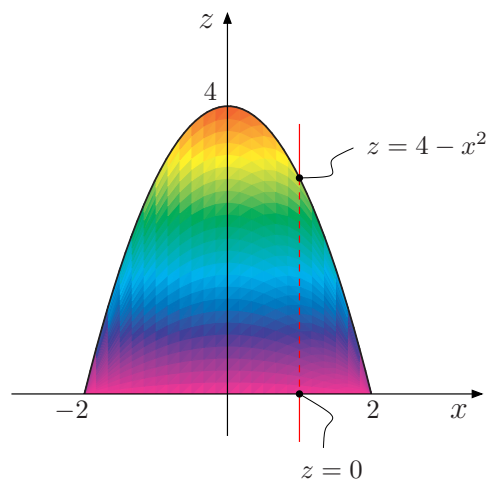
representa a curva interseção do plano com o cilindro. Considerando os planos $y = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W .

b) Temos $V(W) = \iiint_W dx dy dz$, onde W pode ser descrito por:

$$W = \{(x, y, z); (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 4 - z\}$$

onde

$$D_{xz} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}.$$



Então,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_{D_{xz}} \left[\int_0^{4-z} dy \right] dx dz = \iint_{D_{xz}} (4-z) dx dz = \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (4-z) dz dx = \int_{-2}^2 \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (32 - 8x^2 - 16 + 8x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[16x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(32 - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{5} \text{ u.v.} \end{aligned}$$