Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 7

Exercício 1: Dada a integral dupla

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx\,.$$

a) Esboce a região D.

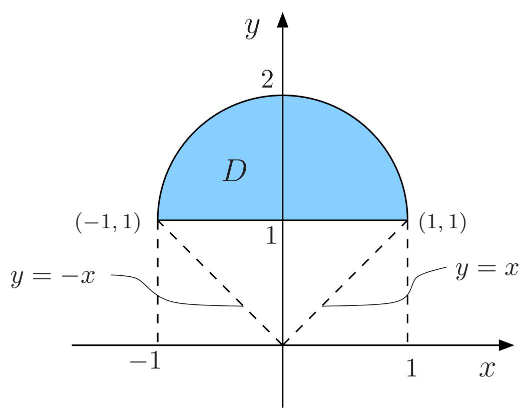
b) Inverta a ordem de integração.

c) Calcule I para a função $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d) Se uma lâmina tem a forma da região D e se a densidade em cada ponto é proporcional à distância de $P = (x,y)$ à origem, calcule a coordenada $\overline{x}$ do centro de massa de D.

Solução:

a) A região de integração D é dada por $D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$. Se $y = 1+\sqrt{1-x^2}$ então $y-1 = \sqrt{1-x^2}$, portanto $x^2+(y-1)^2 = 1$. Considerando que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 1$, o esboço de D está representado na figura que se segue.



b) De $x^2+(y-1)^2 = 1$, temos $x^2 = 1-(y-1)^2$, logo $x = \pm\sqrt{1-(y-1)^2}$. Portanto, podemos descrever D por:

$$D : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2} \end{cases} .$$

Logo,

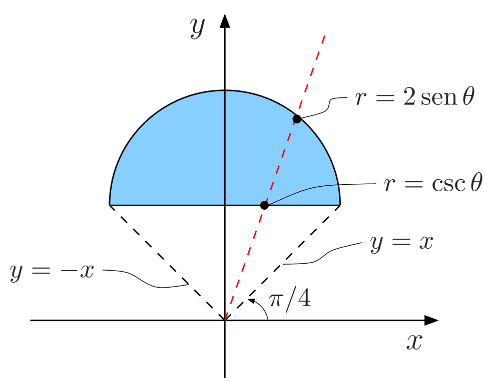
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dxdy\,.$$

c) Calculemos $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$. Usando coordenadas polares, temos:

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = & r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{array}\right.$$

De $x^2+(y-1)^2=1$ ou $x^2+y^2=2y$, temos $r^2=2r\,\mathrm{sen}\,\theta$ ou $r=2\,\mathrm{sen}\,\theta$ se $r\neq 0$. De $y=1$, temos $r\,\mathrm{sen}\,\theta=1$, portanto $r=\csc\theta$. Então o conjunto $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta}:\left\{\begin{array}{c} \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4} \\ \csc\theta\leq r\leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right.$$



Logo:

$$I=\iint\limits_{D_{r\theta}}\frac{1}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\csc\theta}^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}dr\,d\theta=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(2\,\mathrm{sen}\,\theta-\csc\theta)\,d\theta=\Big[-2\cos\theta-\ln|\csc\theta-\mathrm{cotg}\,\theta|\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=\left[2\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right]-\left[-2\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)\right]=$$

$$=\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=$$

$$=2\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1}=2\sqrt{2}+2\ln(\sqrt{2}-1)\,.$$

d) Como a densidade em $P=(x,y)$ é proporcional à distância de P à origem, então temos que $\delta(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, onde k é uma constante de proporcionalidade. Como $\overline{x}=\frac{\iint_D x\delta(x,y)\,dA}{M}$, então $\overline{x}=\frac{k\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dA}{M}$.

Observemos que a função $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$ é ímpar na variável x pois $f(-x,y)=-x\sqrt{x^2+y^2}=-f(x,y)$. Além disso, D tem simetria em relação ao eixo y. Então $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dA=0$. Logo, $\overline{x}=0$.

Exercício 2: Seja a integral

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} e^{x^3}\ dxdy+\int_1^4\int_{\sqrt{y}/2}^{1} e^{x^3}\ dxdy\,.$$

Escreva a integral I como uma única integral iterada na ordem de integração invertida e calcule seu valor.

Solução: Temos

$$I=\iint_D e^{x^3}\ dxdy$$

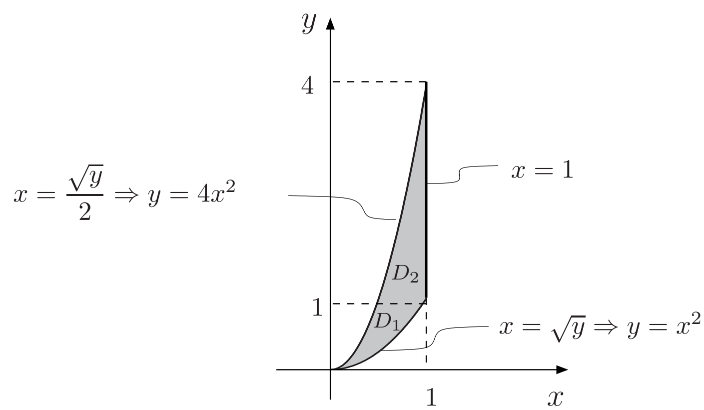
onde $D=D_1\cup D_2$ com

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le y\le 1\,,\ \frac{\sqrt{y}}{2}\le x\le\sqrt{y}\right\}$$

e

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le y\le 4\,,\ \frac{\sqrt{y}}{2}\le x\le 1\right\}\ .$$

Com as informações dadas acima, podemos ilustrar a nossa região D.



Enquadrando D como tipo I, temos:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1\,,\ x^2\le y\le 4x^2\right\}\ .$$

Então:

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3}\ dydx=\int_0^1 e^{x^3}\left(4x^2-x^2\right)\ dx=$$

$$=\int_0^1 e^{x^3}\left(3x^2\right)\ dx=e^{x^3}\Big|_0^1=e-1\,.$$

Exercício 3: Exprima (sem calcular)

$$\int_0^{\pi/4}\int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{r^2}{1+r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,drd\theta$$

como uma integral iterada em coordenadas retangulares nas duas ordens de integração.

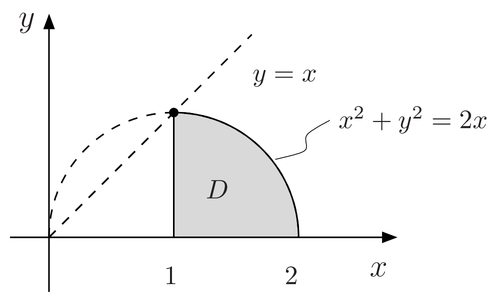
Solução: Separando o jacobiano r, a expressão $rdrd\theta$ é transformada em $dxdy$ e o restante do integrando fica

$$\frac{r}{1+r\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y} = f(x,y)\,.$$

Agora, vamos reconhecer a região de integração $D_{r\theta}$: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ \sec\theta \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$. A fronteira $r = \sec\theta = 1/\cos\theta$ ou $r\cos\theta = 1$ corresponde à reta $x = 1$. A fronteira $r = 2\cos\theta$ ou $r^2 = 2r\cos\theta$ corresponde à circunferência $x^2+y^2 = 2x$ ou $(x-1)^2+y^2 = 1$.

Como $0 \leq \theta \leq \pi/4$, então a região de integração D se encontra no primeiro quadrante, entre o eixo x e a reta $y = x$, limitada pela reta $x = 1$ e a circunferência $x^2+y^2 = 2x$. Assim,

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\,dxdy\,.$$



Descrição de D como tipo I

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x\leq 2\,,\ 0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\right\}\,.$$

Então

$$I = \int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\,dydx\,.$$

Descrição de D como tipo II

$$x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 1\pm\sqrt{1-y^2}\,.$$

Como $x\geq 1$ então $x = 1+\sqrt{1-y^2}$. Assim,

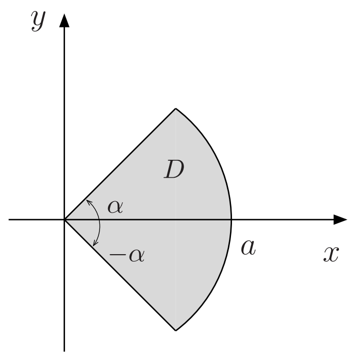
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq y\leq 1\,,\ 1\leq x\leq 1+\sqrt{1-y^2}\right\}\,.$$

Então

$$I = \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\, dxdy\,.$$

Exercício 4: Uma placa fina de densidade constante δ tem a forma de um setor circular de raio a e ângulo central 2α. Mostre que o momento de inércia em relação à bissetriz do ângulo é dada por $\frac{1}{4}Ma^2\left(1-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\alpha}\right)$, onde M é a massa da placa.

Solução: Consideremos o setor circular D com vértice na origem e a bissetriz coincidindo com o eixo x.



Como a densidade é constante e igual a δ, a massa M é dada por

$$M = \delta A(D) = \delta \times \frac{1}{2} \times 2\alpha \times a^2 = \delta\alpha a^2 \qquad (1)$$

Como

$$I_x = \iint_D y^2\delta\, dxdy = \delta \iint_D y^2\, dxdy$$

então por coordenadas polares, temos

$$I_x = \delta \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^a r^2\operatorname{sen}^2\theta r\, drd\theta = \delta \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^a r^3\operatorname{sen}^2\theta\, drd\theta =$$

$$= \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{\delta a^4}{4}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{\delta a^4}{8}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{\delta a^4}{8}\left(2\alpha - 2\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}\right),$$

isto é,

$$I_x = \frac{\delta a^4}{4}\left(\alpha - \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$I_x = \frac{Ma^2}{4}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\alpha}\right),$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 5: Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y^2\cos(xy)}{x}\,dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $\dfrac{x^2}{y}=1$, $\dfrac{y^2}{x}=1$, $x^2=4y$ e $y^2=4x$.

Solução: Escolhemos como mudança de variáveis $u=x^2/y$ e $v=y^2/x$. Por propriedades dos jacobianos, temos:

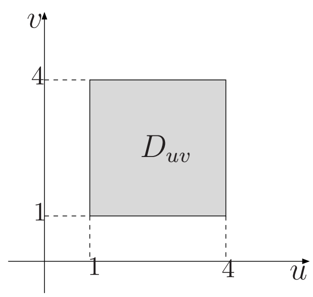
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

onde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\end{vmatrix}=\frac{4xy}{xy}-\frac{x^2y^2}{x^2y^2}=4-1=3\,.$$

Logo, $J=1/3$.

Como $dA=|J|\,dudv$, então $dA=1/3\;dudv$. A região D_{uv} está limitada pelas retas $u=1$, $v=1$, $u=4$ e $v=4$.



Observe que $u=x^2/y$ e $v=y^2/x$ nos dão a relação $uv=xy$. Então, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, temos:

$$\iint_D \frac{y^2\cos(xy)}{x}\,dA=\iint_{D_{uv}} v\cos(uv)\frac{1}{3}\,dudv=\frac{1}{3}\int_1^4\!\!\int_1^4 v\cos(uv)\,dudv=$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4 v\int_1^4\cos(uv)\,dudv=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{v}{v}\Big[\operatorname{sen}(uv)\Big]_1^4 dv=$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4(\operatorname{sen}4v-\operatorname{sen}v)\,dv=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos 4v+\cos v\right]_1^4=$$

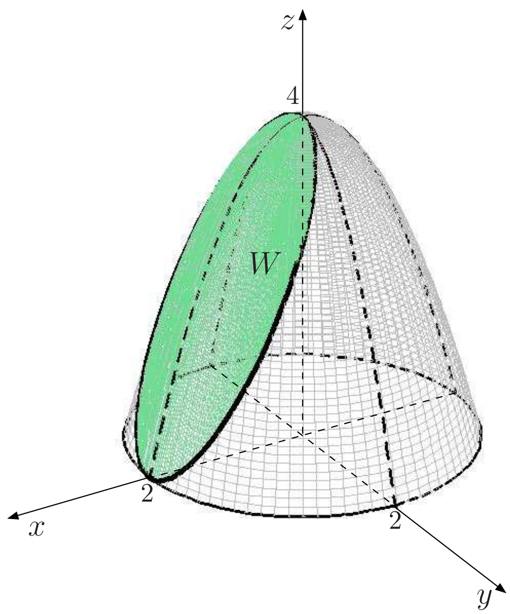
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\cos 16+\cos 4+\frac{1}{4}\cos 4-\cos 1\right)=\frac{1}{12}\left(5\cos 4-4\cos 1-\cos 16\right)\,.$$

Exercício 6: Seja W o sólido limitado superiormente pela superfície $z=4-x^2-y^2$ e inferiormente pelo plano $z=4-2x$.

a) Esboce o sólido W b) Calcule, por integral tripla, o volume do sólido W

Solução:

a) O esboço de W está representado na figura que se segue.

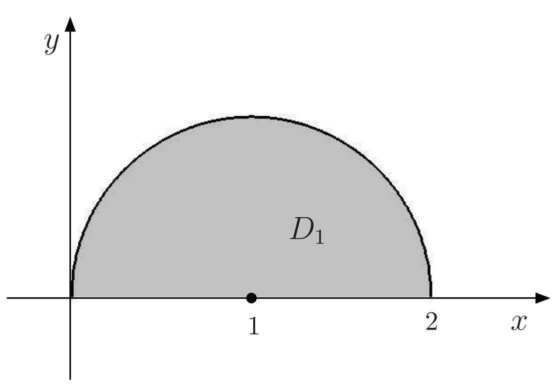


b) A projeção D do sólido W no plano xy se encontra combinando as duas superfícies:

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 4 - 2x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Então, D é dada por $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Devido a simetria, temos que $V(W) = 2V(W_1)$, onde $W_1 = \{(x,y,z);\ (x,y) \in D_1\ ,\ 4-2x \leq z \leq 4-x^2-y^2\}$ onde D_1 é dado por $D_1 : (x-1)^2+y^2 \leq 1$, com $y \geq 0$.



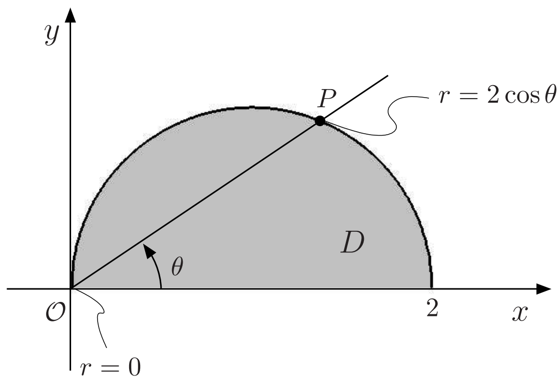
Então,

$$V(W) = 2 \iint\limits_{D_1} \int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dzdxdy = 2 \iint\limits_{D_1} \left(2x - x^2 - y^2\right)\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy = r\ drd\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases} .$$

De $x^2+y^2=2x$ temos $r=2\cos\theta$. Observe que em D_1 o ângulo polar θ varia de 0 (no eixo polar) a $\pi/2$ no ponto $(0,0)$. Fixado θ, tal que $0\leq\theta\leq\pi/2$, o raio vetor r deve variar desde 0 até o valor $\mathcal{O}P=2\cos\theta$.



Então, $D_{1r\theta}$ é dado por $D_{1r\theta}:\begin{cases} 0\leq\theta\leq\pi/2 \\ 0\leq r\leq 2\cos\theta \end{cases}$. Podemos, pois escrever:

$$V(W)=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\left(2r\cos\theta-r^2\right)\,r\ drd\theta=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\left(2r^2\cos\theta-r^3\right)\,dr\ d\theta=2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2r^3}{3}\cos\theta-\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{16}{3}\cos^4\theta-4\cos^4\theta\right)\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\ d\theta\,.$$

Temos:

$$\cos^4\theta=\left(\cos^2\theta\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right).$$

Fazendo

$$\begin{aligned} u=2\theta\ &\Rightarrow\ du=2\ d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{du}{2} \\ \theta=0\ &\Rightarrow\ u=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2}\ &\Rightarrow\ u=\pi, \end{aligned}$$

temos:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\ d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos u+\cos^2 u\right)\frac{du}{2}=$$

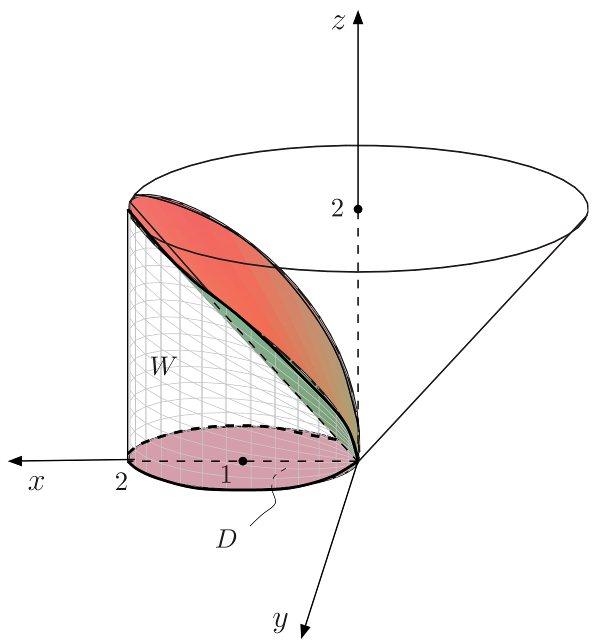
$$=\frac{1}{8}\left[u+2\,\mathrm{sen}\,u+\frac{1}{2}\left(u+\frac{\mathrm{sen}\,2u}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{16}\,.$$

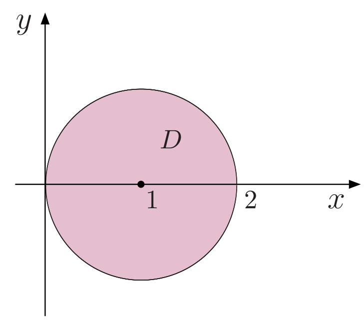
Logo,

$$V(W) = \frac{8}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \ \ u.v.$$

Exercício 7: Calcule a massa do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se a densidade é $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução: O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.





Sabemos que a massa M é dada por

$$M = \iiint\limits_W \sigma(x, y, z)\ dxdydz = \iiint\limits_W \left(x^2 + y^2\right)\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas (r, θ, z), tem-se:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \\ \text{Jacobiano} = r \end{cases}$$

As variações de r e θ são encontradas sobre a região D, projeção de W sobre o plano xy. Convertendo a equação $x^2 + y^2 = 2x$ para coordenadas cilíndricas, temos $r^2 = 2r\cos\theta$ o que implica $r = 0$ ou $r = 2\cos\theta$ portanto $0 \leq r \leq 2\cos\theta$.

A variação de θ é obtida pela "varredura" em D, no sentido anti-horário, isto é, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. A superfície cônica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se converte em $z = r$. Logo $0 \leq z \leq r$. Assim, $W_{r\theta z}$ está limitada por

$$W_{r\theta z} : \left\{ \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & z & \leq & r \\ 0 & \leq & r & \leq & 2\cos\theta \\ -\pi/2 & \leq & \theta & \leq & \pi/2 \end{array} \right. .$$

Temos então:

$$M = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\, dxdydz = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r\ drd\theta dz =$$

$$= \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^3\ drd\theta dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^r r^3\ dzdrd\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \cdot r\ drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^4\ drd\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{32}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta\ d\theta\,.$$

Observe que:

$$\cos^5\theta = \left(\cos^2\theta\right)^2 \cos\theta = \left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)^2\cos\theta = \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\cos\theta\,.$$

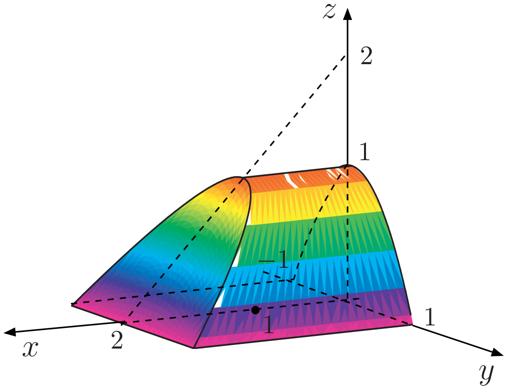
Então:

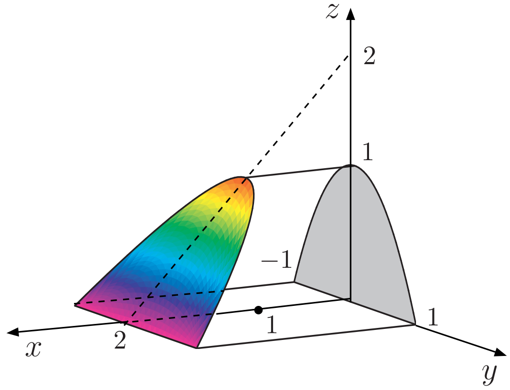
$$M = \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\cos\theta\ d\theta =$$

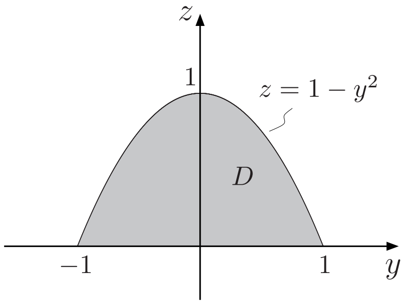
$$= \frac{32}{5}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32}{5}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{512}{75}\ \textit{u.m.}$$

Exercício 8: Calcule $\displaystyle\iiint\limits_W (y-1)\ dV$, onde W é a região delimitada por $x = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$ e $z = 1 - y^2$.

Solução: O sólido W e sua a projeção D sobre o plano yz acham-se ilustrados nas figuras a seguir.







Podemos descrever W como

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 2-z\,,\ (y,z) \in D\right\}$$

onde

$$D = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1-y^2\right\}\ .$$

Então:

$$\iiint\limits_W (y-1)\ dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_0^{2-z} (y-1)\ dx\right]\ dydz =$$

$$= \iint\limits_D (y-1)(2-z)\,dydz = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2} (y-1)(2-z)\,dzdy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (y-1)\left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{1-y^2} dy =$$

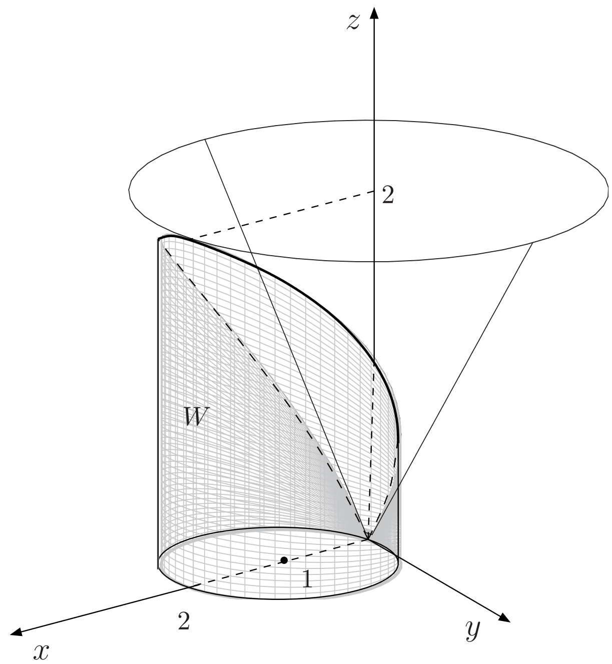
$$= \int_{-1}^{1} (y-1)\left(2 - 2y^2 - \frac{\left(1-y^2\right)^2}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (y-1)\left(3 - 2y^2 - y^4\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^4}{2} - \frac{y^6}{6} - 3y + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -\frac{32}{15}\,.$$

Exercício 9: Calcule a massa do sólido limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, se a densidade é $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$.

Solução: O esboço do sólido está representado na figura que se segue.



O sólido W é descrito por

$$W = \left\{(x,y,z);\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\,,\ (x,y) \in D\right\}$$

onde D é o disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

A massa de W é dada por:

$$M = \iiint_W \delta(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_W \left(x^2+y^2\right)\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dxdydz &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}$$

As equações do cone e do cilindro em coordenadas cilíndricas são, respectivamente $z = r$ e $r^2 = 2r\cos\theta$, ou $r = 2\cos\theta$. Então $W_{r\theta z}$ é definido por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \\ 0 \leq z \leq r\,. \end{cases}$$

Logo:

$$M = \iiint\limits_{W} \left(x^2+y^2\right)\, dxdydz = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r\; drd\theta dz =$$

$$= \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^3\; drd\theta dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^3 \int_0^r\; dzdrd\theta =$$

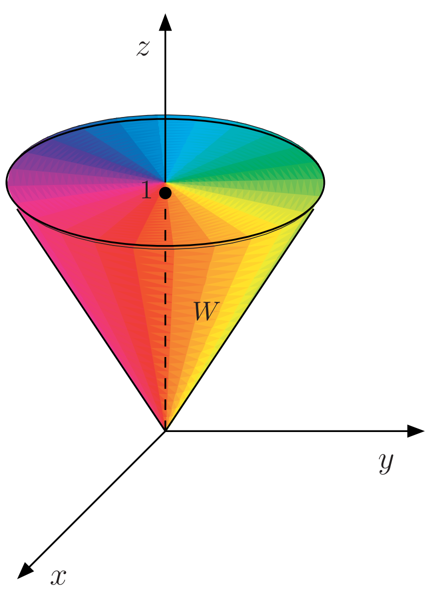
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^4\; drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\theta\; d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)^2\cos\theta\; d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)\; d(\operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \frac{32}{5}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{512}{75}\;\; \textit{u.m.}$$

Exercício 10: Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido limitado inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e superiormente pelo plano $z=1$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z)=z^2$.

Solução: O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.



Temos

$$I_z = \iiint\limits_{W} \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_{W} \left(x^2+y^2\right) z^2\, dV\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\text{sen}\,\theta \\ z &=& z \\ dV &=& r\,drd\theta dz \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right. .$$

A descrição de W em coordenadas cilíndricas é:

$$W_{r\theta z}:\left\{\begin{array}{l} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ r\le z\le 1 \end{array}\right. .$$

Então:

$$I_z = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}}\left(r^2\cdot z^2\right)r\,drd\theta dz = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^3z^2\,drd\theta dz =$$

$$= \int_0^1 r^3\int_r^1 z^2\int_0^{2\pi} d\theta dzdr = 2\pi\int_0^1 r^3\int_r^1 z^2\,dzdr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^3\left[\frac{z^3}{3}\right]_r^1 dr = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r^3\left(1-r^3\right)\,dr = \frac{2\pi}{3}\int_0^1\left(r^3-r^6\right)\,dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{14}\,.$$

Exercício 11: Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da semi-esfera $x^2+y^2+z^2=16$, com $x\ge 0$ com o plano $y+z=4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x,y,z) é dada por $\delta(x,y,z)=x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\dfrac{32}{3}M$, onde M é a massa do arame.

Solução: De $x^2+y^2+z^2=16$, com $x\ge 0$ e $y+z=4$, temos que $x^2+y^2+(4-y)^2=16$, com $x\ge 0$ ou $x^2+2y^2-8y=0$, com $x\ge 0$ ou $x^2+2\left(y^2-4y+4\right)=8$, com $x\ge 0$ ou $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$, com $x\ge 0$ (semi-elipse) que representa a projeção de C sobre o plano xy. Então $x=2\sqrt{2}\cos t$, $y=2+2\,\text{sen}\,t$, e $z=4-y=2-2\,\text{sen}\,t$, com $-\pi/2\le t\le\pi/2$ pois $x=\sqrt{2}\cos t\ge 0$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\gamma(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t, 2+2\,\text{sen}\,t, 2-2\,\text{sen}\,t\right)$$

com $-\pi/2\le t\le\pi/2$.

Logo,

$$\gamma'(t)=\left(-2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, 2\cos t, -2\cos t\right),$$

portanto

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{8\,\text{sen}^2\,t+4\cos^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{8\,\text{sen}^2\,t+8\cos^2 t}=2\sqrt{2}\,.$$

Assim,

$$ds = \|\gamma'(t)\| \ dt = 2\sqrt{2}\ dt\,.$$

Como

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\ ds = \int_C x\ ds$$

então:

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\sqrt{2}\cos t\right) 2\sqrt{2}\ dt = 8\Big[\operatorname{sen} t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 16 \ \text{ u.m.}$$

Por outro lado, o momento de inércia em relação ao eixo x é dado por:

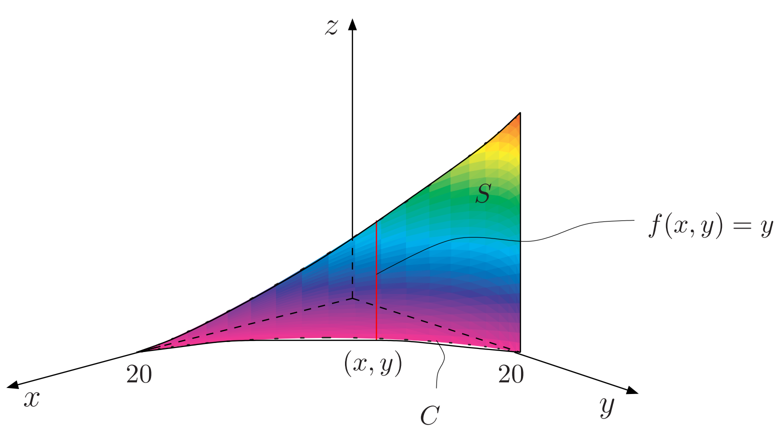
$$\begin{aligned}
I_x &= \int_C \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\ ds = \int_C \left(y^2+z^2\right) x\ ds = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(2+2\operatorname{sen} t)^2 + (2-2\operatorname{sen} t)^2\right]\left(2\sqrt{2}\cos t\right) 2\sqrt{2}\ dt = \\
&= 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4+8\operatorname{sen} t+4\operatorname{sen}^2 t+4-8\operatorname{sen} t+4\operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\ dt = \\
&= 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1+\operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\ dt = 64\left[\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\
&= 64\left(2+\frac{2}{3}\right) = \frac{512}{3} = \frac{32}{3}\cdot 16\,.
\end{aligned}$$

Logo:

$$I_z = \frac{32M}{3}\,.$$

Exercício 12: Um pintor deseja pintar ambos os lados de uma cerca cuja base está dada pela curva $C : x^{2/3}+y^{2/3} = (20)^{2/3}$, para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. A altura está dada por $f(x,y) = y$. Se o pintor cobra R reais por metro quadrado, quanto ele receberá?

Solução: O esboço da cerca S está representada na figura que se segue.



Apresentemos uma parametrização para C. Fazendo $u = x^{1/3}$, $v = y^{1/3}$ e $a = 20^{1/3}$ e substituindo na equação de C, temos $u^2 + v^2 = a^2$, com $u \geq 0$ e $v \geq 0$ portanto $u = a\cos t$ e $v = a \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Como $x = u^3$ e $y = v^3$, então:

$$\begin{aligned} x &= a^3 \cos^3 t = 20\cos^3 t \\ y &= a^3 \operatorname{sen}^3 t = 20 \operatorname{sen}^3 t \end{aligned}\ .$$

Logo $\gamma(t) = (20\cos^3 t, 20\operatorname{sen}^3 t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$ é uma parametrização para C. Temos que $\gamma'(t) = (-60\cos^2 t \operatorname{sen} t, 60 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$, então:

$$\begin{aligned} &\left\|\gamma'(t)\right\| = 60\sqrt{\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} = \\ &= 60\sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} = 60\,|\cos t \operatorname{sen} t| = 60\cos t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

pois $0 \leq t \leq \pi/2$. Logo, $ds = \left\|\sigma'(t)\right\| dt = 60\cos t \operatorname{sen} t\, dt$.

A área de um lado da superfície é dada por

$$\begin{aligned} &A(S) = \int_C f(x,y)\, ds = \int_C y\, ds = \int_0^{\pi/2} (20\operatorname{sen}^3 t)60\cos t \operatorname{sen} t\, dt = \\ &= 1200\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt = 1200 \cdot \frac{\operatorname{sen}^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = 240\ \mathrm{m}^2\,. \end{aligned}$$

Portanto, o pintor receberá $2 \times 240\ R = 480\ R$ reais.