Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

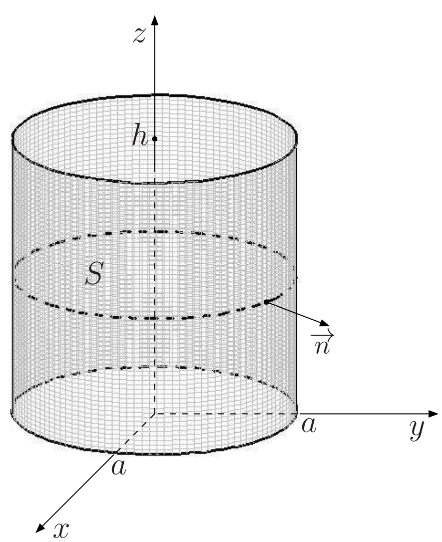
Cálculo III-A – Lista 11

Exercício 1: Seja o campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de S, orientada com $\overrightarrow{n}$ exterior a S, se:

a) $S : x^2 + y^2 = a^2$ com $a > 0$ e $0 \leq z \leq h$;
b) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com $a > 0$.

Solução:

a) O esboço de S está representado na figura que se segue.



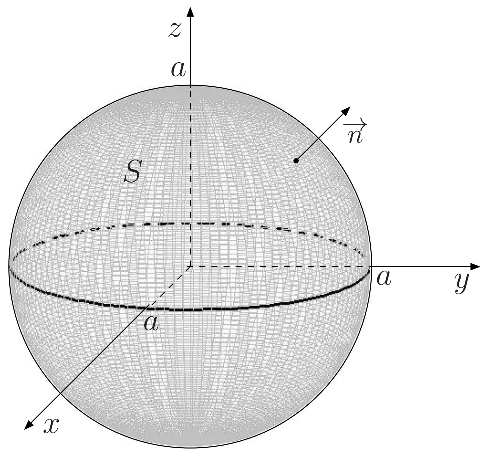
Da teoria, temos, no caso do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, que o unitário normal exterior é da forma $\overrightarrow{n} = \dfrac{(x,y,0)}{a}$. Então, o fluxo ϕ é dado por:

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (x-y, x+y, z) \cdot \frac{(x,y,0)}{a}\, dS =$$

$$= \frac{1}{a} \iint_S \left(x^2 - xy + xy + y^2\right)\, dS = \frac{1}{a} \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS =$$

$$= \frac{a^2}{a} \iint_S dS = aA(S) = a(2\pi a h) = 2\pi a^2 h\,.$$

b) O esboço de S está representado na figura que se segue.



Da teoria, temos, no caso da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que o unitário normal exterior é dado por $\overrightarrow{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$. Então, o fluxo é dado por:

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (x - y, x + y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a}\, dS =$$

$$= \frac{1}{a} \iint_S \left(x^2 - xy + xy + y^2 + z^2\right) dS =$$

$$= \frac{1}{a} \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS = \frac{a^2}{a} \iint_S dS = aA(S) =$$

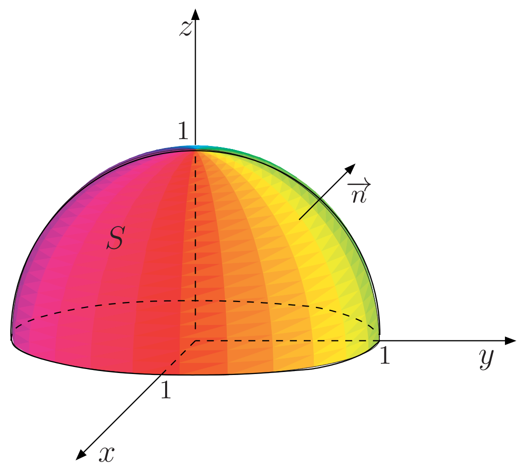
$$= a\left(4\pi a^2\right) = 4\pi a^3 .$$

Exercício 2: Calcule o fluxo do campo vetorial de

$$\overrightarrow{F} = (x - y - 4)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

através da semiesfera superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com campo de vetores normais $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} > 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} > 0$, então $\overrightarrow{n}$ aponta para cima e, portanto, $\overrightarrow{n} = = \dfrac{(x, y, z)}{a} = (x, y, z)$ pois $a = 1$. O fluxo é dado por:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_S (x - y - 4, y, z) \cdot (x, y, z)\ dS =$$

$$= \iint_S \left(x^2 - xy - 4x + y^2 + z^2\right)\ dS =$$

$$= \iint_S \big(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=\,1} - xy - 4x\big)\ dS = \iint_S (1 - xy - 4x)\ dS =$$

$$= \iint_S dS - \iint_S (xy - 4x)\ dS = A(S) - \iint_S (xy - 4x)\ dS =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 1^2 - \iint_S (xy - 4x)\ dS = 2\pi - \iint_S (xy - 4x)\ dS\,.$$

Ora, para calcular $\displaystyle\iint_S (xy - 4x)\ dS$, devemos parametrizar S. Então, temos que $S : \varphi(\phi, \theta) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$, com $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Também temos que $dS =$

$a^2 \operatorname{sen} \phi \; d\phi d\theta = \operatorname{sen} \phi \; d\phi d\theta$. Logo,

$$\iint_S (xy - 4x) \; dS =$$

$$= \iint_D \left(\operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \right) \operatorname{sen} \phi \; d\phi d\theta =$$

$$= \iint_D \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta \; d\phi d\theta - 4 \iint_D \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \; d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \; d\theta d\phi - 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \phi \int_0^{2\pi} \cos \theta \; d\theta d\phi =$$

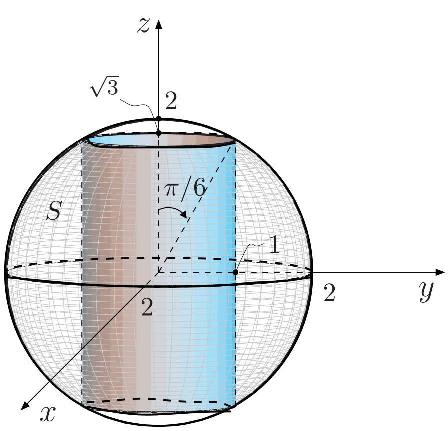
$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \phi \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} d\phi - 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \phi \big[\operatorname{sen} \theta \big]_0^{2\pi} d\theta = 0 \, .$$

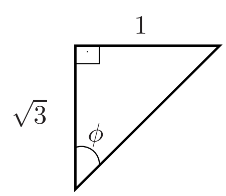
Portanto,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \; dS = 2\pi \, .$$

Exercício 3: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS$, onde $\overrightarrow{F} = -z \, \overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $\overrightarrow{n}$ apontando para fora da esfera.

Solução: A superfície S está ilustrada na figura que se segue:





$$\Rightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

Uma parametrização de S é dada por

$$S : \varphi(\phi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, , \; 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, , \; 2 \cos \phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D = \left[\frac{\pi}{6} \, , \, \frac{5\pi}{6} \right] \times [0, 2\pi]$. Temos:

$$dS = a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \; d\theta \overset{a=2}{=} 4 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \; d\theta \, .$$

Como $\overrightarrow{n}$ é exterior a S, então

$$\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{a} \overset{a=2}{=} \frac{(x,y,z)}{2}\,.$$

Assim:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (0,0,-z) \cdot \frac{(x,y,z)}{2}\, dS =$$

$$= -\iint_S z^2\, dS = -\iint_D 4\cos^2\phi \cdot 4 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta =$$

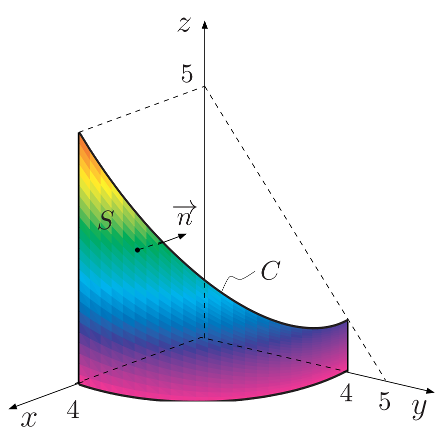
$$= -16 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi = 32\pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2\phi\, d(\cos\phi) =$$

$$= 32\pi \left[\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{32\pi}{3}\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right] =$$

$$= -\frac{32\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = -4\pi\sqrt{3}\,.$$

Exercício 4: Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F} = -x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3y^2 z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 16$, situado no primeiro octante, entre $z = 0$ e $z = 5 - y$ com a orientação normal que aponta para o eixo z.

Solução: A superfície S está ilustrada na figura que se segue.



Temos $S : \varphi(t,z) = (4\cos t\,,\ 4\operatorname{sen} t\,,\ z)$, com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq 5 - 4\operatorname{sen} t \end{cases}$. Além disso,

$$dS = a\, dt\, dz \overset{a=4}{=} 4\, dt\, dz\,.$$

Como $\overrightarrow{n}$ aponta para o eixo z, então,

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-x,-y,0)}{a} = \frac{(-x,-y,0)}{4}\,.$$

Portanto,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S \big(-x,-y,3y^2z\big) \cdot \frac{(-x,-y,0)}{4}\, dS =$$

$$= \frac{1}{4}\iint_S \underbrace{\big(x^2+y^2\big)}_{=\,16}\, dS = 4\iint_S dS = 4\iint_S dS =$$

$$= 4\iint_D 4\, dt\, dz = 16\int_0^{\pi/2}\int_0^{5-4\,\mathrm{sen}\, t} dz\; dt =$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} (5-4\,\mathrm{sen}\, t)\; dt = 16\big[5t+4\cos t\big]_0^{\pi/2} =$$

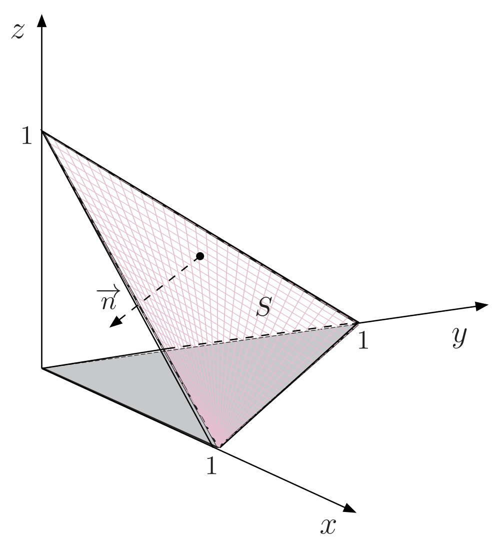
$$= 16\left(\frac{5\pi}{2}-4\right) = 40\pi - 64\,.$$

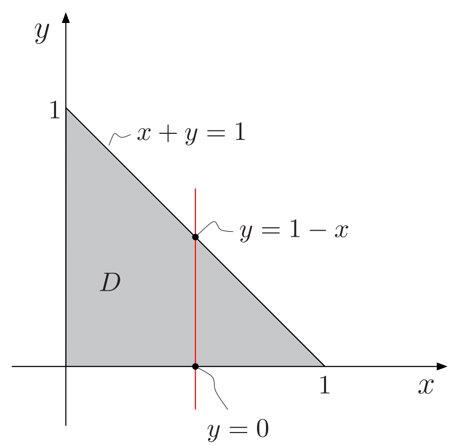
Exercício 5: Calcule $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS$ onde

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xze^y\, \overrightarrow{\mathbf{i}} - xze^y\, \overrightarrow{\mathbf{j}} + z\, \overrightarrow{\mathbf{k}}$$

e S é a parte do plano $x+y+z=1$ no primeiro octante com orientação para baixo.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.





A superfície pode ser descrita por $S : z = 1-x-y = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : 0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1-x$. Um vetor normal a S é dado por $N = (-f_x, -f_y, 1) = (1,1,1)$ Como $\overrightarrow{n}$ aponta para baixo, então $\overrightarrow{n} = \dfrac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}$. Temos que $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\;dxdy$. Então,

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS = \iint_S \big(xze^y, -xze^y, z\big)\cdot\frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}\,dS =$$

$$= \iint_S \big(-xze^y + xze^y + z\big)\cdot\frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}\;dS =$$

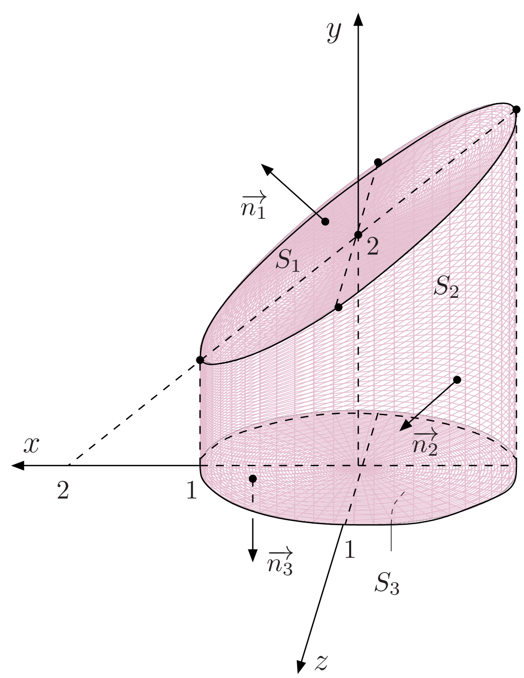
$$= \iint_S \frac{\big(xze^y - xze^y - z\big)}{\sqrt{3}}\,dS = \iint_S \frac{-z}{\sqrt{3}}\,dS =$$

$$= \iint_D d\frac{-(1-x-y)}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\;dxdy = \iint_D (-1+x+y)\;dxdy =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(-1+x+y)\;dydx = \int_0^1\Big[-y+xy+\frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x}\,dx = \frac{-1}{6}\,.$$

Exercício 6: Calcule $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 5\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2+z^2=1$ e pelos planos $y=0$ e $x+y=2$ com a orientação positiva (isto é, $\overrightarrow{n}$ exterior a S).

Solução: Para esboçar S, façamos uma inversão nos eixos coordenados.



Temos que $S = S_1\cup S_2\cup S_3$, orientada positivamente. Logo,

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS = \iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\;dS + \iint_{S_2}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_2}\;dS + \iint_{S_3}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_3}\;dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\ dS$

Temos $S_1 : y = 2 - x = f(x,z)$, com $(x,z) \in D : x^2 + z^2 \leq 1$. Logo, uma parametrização de S_1 é $\varphi(x,z) = (x, f(x,z), z) = (x, 2-x, z)$, com $(x,z) \in D$. Logo, $\varphi_x = (1, f_x, 0) = (1, -1, 0)$ e $\varphi_z = (0, f_z, 1) = (0,0,1)$ portanto

$$\varphi_x \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & f_x & 0 \\ 0 & f_z & 1 \end{vmatrix} = (f_x, -1, f_z) = (-1,-1,0)\,.$$

Logo, $dS = \|\varphi_x \times \varphi_z\|\, dxdz = \sqrt{2}\, dxdz$. Como $\vec{n_1}$ aponta para cima, então a componente y de $\vec{n_1}$ é positiva. Logo $\vec{n_1} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$. Dessa forma,

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\ dS = \iint_D (x, 2-x, 5) \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\, dxdz =$$

$$= \iint_D 2\ dxdz = 2 \cdot A(D) = 2\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2}\ dS$

Temos $S_2 : x^2 + z^2 = 1$, com $0 \leq y \leq 2 - x$. Uma parametrização de S_2 é: $\varphi(t,y) = (\cos t, y, \operatorname{sen} t)$, com $(t,y) \in D_1 : 0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2 - \cos t$. Temos

$$\vec{N} = \varphi_t \times \varphi_y = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen} t & 0 & \cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\cos t, 0, -\operatorname{sen} t)$$

portanto, $dS = \|\vec{N}\|\, dtdy = dtdy$. Como $\vec{n_2}$ é exterior a S_2 então $\vec{n_2} = (\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$. Logo,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2}\ dS = \iint_{D_1} (\cos t, y, 5) \cdot (\cos t, 0, \operatorname{sen} t)\ dtdy =$$

$$= \iint_{D_1} \cos^2 t\, dtdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\cos t} \cos^2 t\ dydt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t - \cos^3 t\right)\ dt = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t\ dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} - 0 = 2\pi \text{ (Verifique!)}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n_3}\ dS$

Temos $S_3 : y = 0 = f(x,z)$, com $(x,z) \in D : x^2+z^2 \leq 1$. Logo, $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_z)^2}\, dxdz = dxdz$ e $\overrightarrow{n_3} = -\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Então,

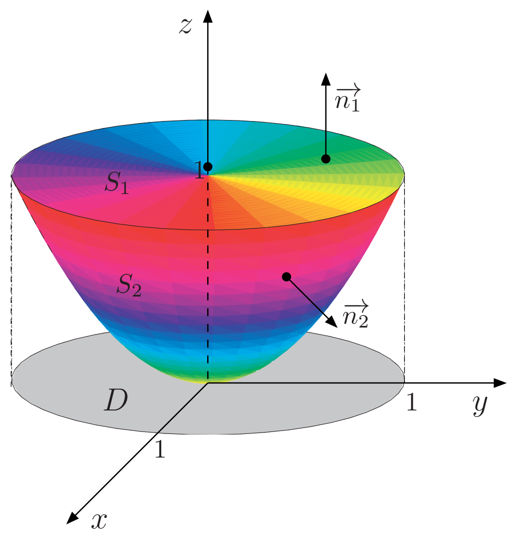
$$\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\, dS = \iint_D (x,0,5) \cdot (0,-1,0)\, dxdz = \iint_D 0\, dxdz = 0\,.$$

Portanto,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 2\pi + 2\pi = 4\pi\,.$$

Exercício 7: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a fronteira com região limitada por $z = 1$ e $z = x^2 + y^2$, com $\overrightarrow{n}$ exterior a S.

Solução: O esboço de $S = S_1 \cup S_2$ está representado na figura que se segue.



Usando propriedade de fluxo, temos

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS\,.$$

Cálculo de $\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS$:

Temos $S_1 : z = 1 = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Temos, também, que $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{k}$ e $dS = dxdy$. Então,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{S_1} (-x, 0, 2 \cdot 1) \cdot (0,0,1)\, dS =$$

$$= \iint_{S_1} 2\, dS = 2A(S) = 2\left(\pi \cdot 1^2\right) = 2\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS$:

Temos $S_2 : z = x^2 + y^2 = g(x, y)$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Um vetor normal a S é dado por $\overrightarrow{N} = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$ que aponta para cima. Como $\overrightarrow{n_2}$ aponta para baixo, então $\overrightarrow{n_2} = \dfrac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$.

Temos que $dS = \|\overrightarrow{N}\|\, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$. Então,

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS = \iint_D \left(-x, 0, 2\left(x^2 + y^2\right)\right) \cdot (2x, 2y, -1)\, dxdy =$$

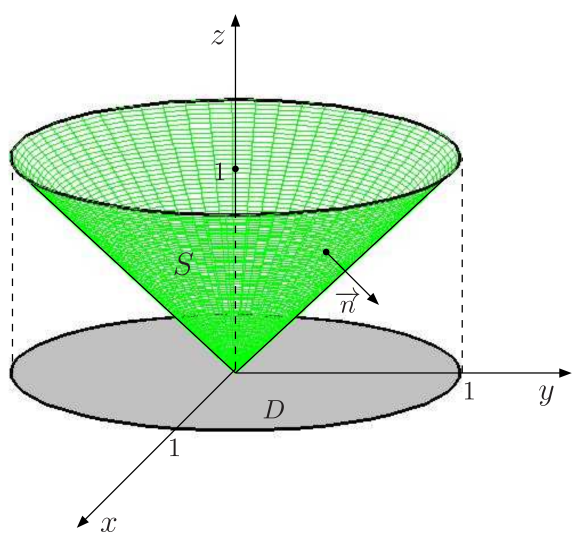
$$= \iint_D \left(-2x^2 - 2x^2 - 2y^2\right)\ dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \left(-2r^2 - 2r^2 \cos^2\theta\right) r\ drd\theta =$$

$$= -2 \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \left(1 + \cos^2\theta\right) r^3\ drd\theta = -2 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2\theta\right) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{3\pi}{2}\,.$$

Exercício 8: Calcule $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde $\overrightarrow{F} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 5\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada com normal $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} < 0$.

Solução: De $\sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$, temos que $z = 1$. Logo, as duas superfícies interceptam-se no plano $z = 1$, segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Assim, o esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} < 0$, então a terceira componente de $\overrightarrow{n}$ é negativa e, portanto, $\overrightarrow{n}$ aponta para baixo. A superfície de S é dada por $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Um vetor normal a S apontando para baixo é

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$

portanto, $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$ e $dS = \|\overrightarrow{N}\| \, dxdy$. Então,

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS &= \iint_D (2,5,3) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy = \\
&= \iint_D \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3\right) dxdy = \\
&= \iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy + \iint_D \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy - 3 \iint_D dxdy \, .
\end{aligned}$$

Como a função $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é ímpar em relação a x e a região D tem simetria em relação ao eixo y, então

$$\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy = 0 \, .$$

Como a função $\dfrac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é ímpar em relação a y e a região D tem simetria em relação ao eixo x, então

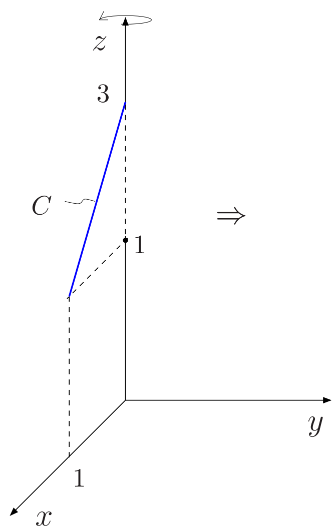
$$\iint_D \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy = 0 \, .$$

Então,

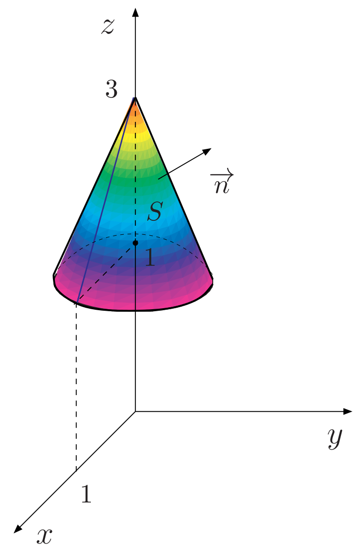
$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS = 0 + 0 - 3A(D) = -3\pi \, .$$

Exercício 9: Ache o fluxo de $\overrightarrow{F} = \left(yz, -xz, x^2 + y^2\right)$ através de S, superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta que liga $(1,0,1)$ e $(0,0,3)$ em torno do eixo z, onde o vetor normal $\overrightarrow{n}$ tem componente z não negativa.

Solução: As figuras a seguir, mostram a curva C e a superfície S.



$\Rightarrow$



Uma parametrização para C é dada por:

$$\sigma(t) = (1,0,1) + t\big[(0,0,3) - (1,0,1)\big] =$$
$$= (1,0,1) + t(-1,0,2) = (1-t\,,\ 0\,,\ 1+2t)\,,$$

com $t \in [0,1]$. Logo,

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1+2t \end{cases}$$

com $t \in [0,1]$. Uma parametrização para S é dada por:

$$S : \varphi(\theta,t) = \big(x(t)\cos\theta\,,\ x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ z(t)\big) =$$
$$= \big((1-t)\cos\theta\,,\ (1-t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ 1+2t\big)$$

com $\theta \in [0,2\pi]$ e $t \in [0,1]$.

Um vetor normal a S é dado por:

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -(1-t)\,\mathrm{sen}\,\theta & (1-t)\cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \big(2(1-t)\cos\theta\,,\ 2(1-t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ 1-t\big)\,.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\phi &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \\
&= \iint_D \big((1-t)(1+2t)\operatorname{sen}\theta\,,\ -(1-t)(1+2t)\cos\theta)\,,\ (1-t)^2\big)\cdot \\
&\quad \cdot\big(2(1-t)\cos\theta\,, 2(1-t)\operatorname{sen}\theta\,,\ 1-t\big)\,dt = \\
&= \iint_D \left[1(1-t)^2(1+2t)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2(1-t)^2(1+2t)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ + (1-t)^3\right] dt = \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-t)^3\ dt = -2\pi\left[\frac{(1-t)^4}{4}\right]_0^1 = -2\pi\left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exercício 10: Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (z+3x)\,\vec{\mathbf{i}} + 5y\,\vec{\mathbf{j}} + (z+3)\,\vec{\mathbf{k}}$$

e S é a superfície do sólido limitado por $z = 1-y^2$, $x=0$, $x=2$ e o plano xy, com vetor normal $\vec{n}$ exterior.

Solução: A superfície S é constituída por quatro superfícies:

Superfície S_1

Temos $S_1 : z = 1-y^2 = z(x,y)$ com $(x,y)\in D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ e

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dxdy = \sqrt{1+4y^2}\ dxdy\,.$$

Superfície S_2

Temos $S_2 : x = 0 = x(y,z)$ com $(y,z)\in D_2 : \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1-y^2 \end{cases}$ e

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dydz = \sqrt{1+0^2+0^2}\ dydz = dydz\,.$$

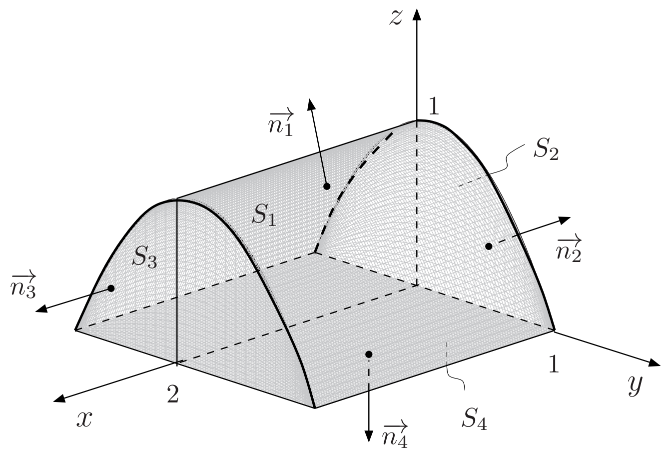
Superfície S_3

Temos $S_3 : x = 2 = x(y,z)$ com $(y,z)\in D_3 = D_2$. Logo $dS = dydz$.

Superfície S_4

Temos $S_4 : z = 0 = z(x,y)$ com $(x,y) \in D_4 = D_1$. Logo $dS = dxdy$.

A superfície S pode ser vista na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n}$ é exterior, então $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{(0,2y,1)}{\sqrt{1+4y^2}}$, $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{\mathbf{i}}$ e $\overrightarrow{n_4} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$. Temos:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_i}\, dS$$

onde,

Superfície S_1

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS =$$

$$= \iint_{D_1} \left(1 - y^2 + 3x\,,\, 5y\,,\, 1 - y^2 + 3\right) \cdot (0\,,\; 2y\,,\, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} \left(10y^2 + 4 - y^2\right) = \int_{-1}^{1} \int_0^2 \left(9y^2 + 4\right) dxdy =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left(9y^2 + 4\right) dy = 2\big[3y^3 + 4y\big]_{-1}^{1} = 4(3+4) = 28\,.$$

Superfície S_2

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS =$$

$$= \iint_{S_2} \big(z\,,\, 5y\,,\, z+3\big) \cdot (-1\,,\; 0\,,\, 0)\, dS =$$

$$= -\iint_{S_2} z\, dS = -\iint_{D_2} z\, dS = -\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2} z\, dzdy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \big[z^2\big]_0^{1-y^2}\, dy = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \big(1 - 2y^2 + y^4\big)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{15}\,.$$

Superfície S_3

$$\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\, dS = \iint_{S_3} \big(z+6\,,\, 5y\,,\, z+3\big) \cdot (1\,,\; 0\,,\, 0)\, dS =$$

$$= \iint_{S_3} (z+6)\, dS = \iint_{S_3} z\, dS + 6\iint_{S_3} dS =$$

$$= \frac{8}{15} + 6\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2} z\, dzdy = \frac{8}{15} + 6\int_{-1}^{1} \big(1 - y^2\big)\, dy =$$

$$= \frac{8}{15} + 6\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15} + 12\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15} + 8\,.$$

Superfície S_4

$$\iint_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\, dS = \iint_{S_4} \big(3x\,,\, 5y\,,\, 3\big) \cdot (0\,,\; 0\,,\, -1)\, dS =$$

$$= -\iint_{D_4} dxdy = -A(D_4) = -A(D_1) = -4\,.$$

Logo,

$$\iint_{S} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 28 - \frac{8}{15} + \frac{8}{15} + 8 - 4 = 32\,.$$