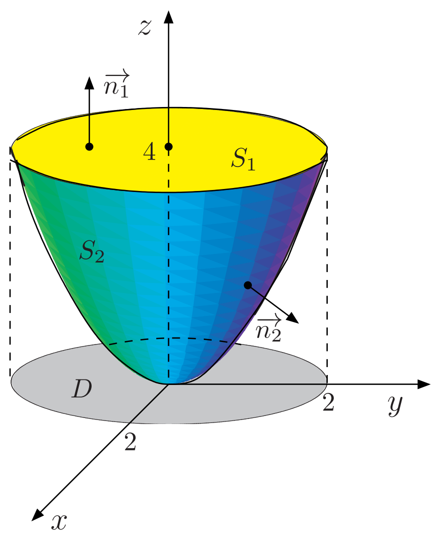
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 12

Exercício 1: Verifique o teorema de Gauss para o campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = = (x,y,z)$ no sólido W limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.

Solução: O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.



Vemos que $\partial W = S_1 \cup S_2$, orientada positivamente. Logo,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_2\, dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_1\, dS$

Temos $S_1 : z = 4 = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$, $\vec{n}_1 = \vec{k}$ e

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+0+0}\, dx\, dy = dx\, dy\,.$$

Então,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iint_D (x,y,4) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy = 4\, A(D) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_2\, dS$

Temos $S_2 : z = x^2 + y^2 = g(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Um vetor normal a S_2 é dado por $\overrightarrow{N} = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$ que está voltado para cima. Como $\vec{n_2}$ aponta para baixo, então $\vec{n}_2 = \frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$. Temos $dS = \|\overrightarrow{N}\|\, dx\, dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$. Então,

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_2\, dS = \iint_D \left(x, y, x^2+y^2\right) \cdot (2x, 2y, -1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2\right)\, dx\, dy = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy\, .$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}_2\, dS = \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi\, .$$

Então,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS = 16\pi + 8\pi = 24\pi\, .$$

Por outro lado:

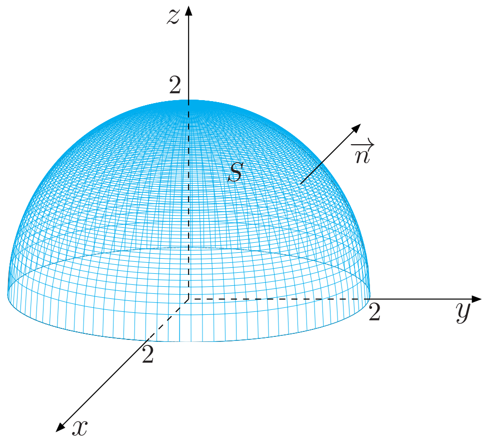
$$\iiint_W \operatorname{div}\overrightarrow{F}\, dV = 3\iiint_W dV = 3\iint_D \int_{x^2+y^2}^4 dz\, dx\, dy =$$

$$= 3\iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right)\, dx\, dy = 3\iint_{D_{r\theta}} \left(4 - r^2\right) r\, dr\, d\theta =$$

$$= 3\int_0^2 \left(4r - r^3\right) \int_0^{2\pi} d\theta\, dr = 6\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 6\pi(8-4) = 24\pi\, .$$

Exercício 2: Calcule o fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F}$ através da superfície aberta S, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(xy^2 + e^y\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(yz^2 + \operatorname{sen}^2 x\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(5 + zx^2\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e $S : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, com $\overrightarrow{n}$ tendo componente z positiva.

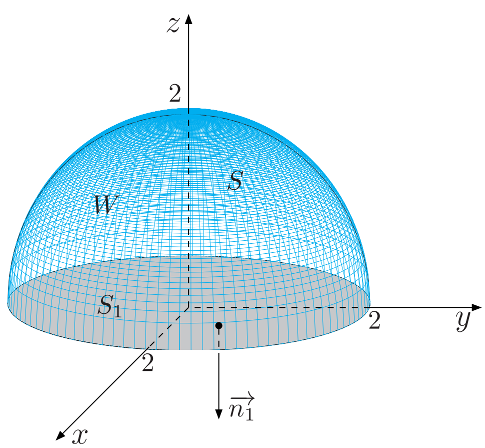
Solução: O esboço da superfície aberta S está representado na figura que se segue.



Para aplicar o teorema de Gauss, devemos considerar a superfície fechada $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1 : z = 0$, $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$, com $\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e também temos que:

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 0 + 0}\, dxdy = dxdy\,.$$

Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Logo, $\partial W = \overline{S}$.



Pelo teorema de Gauss, temos:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS + \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\; dS = \iiint_W \operatorname{div} \overrightarrow{F}\; dV = \iiint_W \left(y^2 + z^2 + x^2\right) dV\,.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos

$$\iiint_W \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\; dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \left(\rho^2\right) \rho^2 \operatorname{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^2 \rho^4 \int_0^{2\pi} d\theta d\rho d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 d\phi =$$

$$= \frac{64\pi}{5}\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} = \frac{64\pi}{5}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, dS$

Temos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, dS = \iint_{S_1} \left(xy^2 + e^y, 0 + \operatorname{sen}^2 x, 5 + 0\right) \cdot (0, 0, -1)\, dS =$$

$$= -5A(S_1) = -5\left(\pi 2^2\right) = -20\pi\,.$$

Logo,

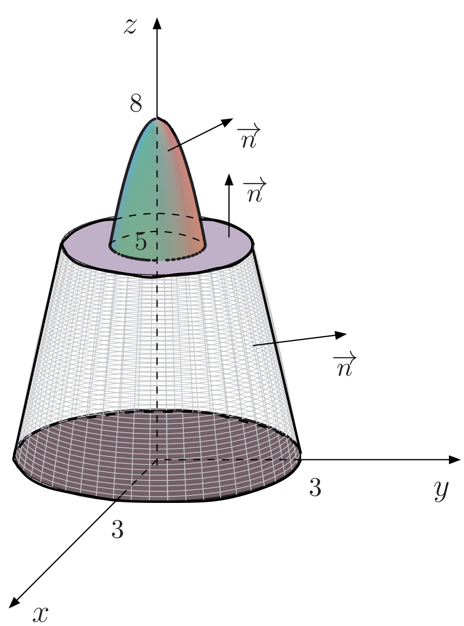
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{64\pi}{5} + 20\pi = \frac{164\pi}{5}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde

$$\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + \left(-2y + e^x \cos z\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(z + x^2\right)\vec{\mathbf{k}}$$

e S é definida por $z = 9 - \left(x^2 + y^2\right)$, $0 \leq z \leq 5$; $z = 5$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e $z = 8 - 3\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 \leq 1$, com $\vec{n}$ exterior a S.

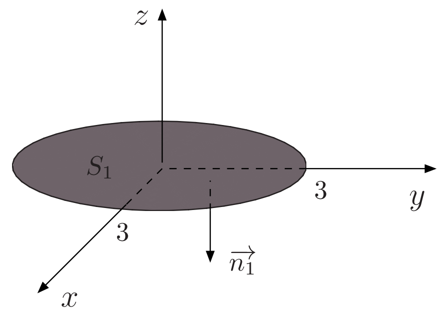
Solução: A superfície S *não é fechada* e pode ser visualizada na figura que se segue.



Como div$\vec{F} = 1 - 2 + 1 = 0$, vamos usar o teorema de Gauss. Para isso, é necessário fechar S através da superfície S_1, porção do plano $z = 0$ com $x^2 + y^2 \leq 9$, orientada com $\vec{n_1} = -\vec{\mathbf{k}}$.

Seja W o sólido limitado por S e S_1. Como $\partial W = S \cup S_1$ está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Gauss. Temos então,

$$\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\; dxdydz = \iiint_W 0\; dxdydz = 0$$



ou

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = 0\,.$$

Mas

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{S_1} \left(x,\ -2y + e^x \cos 0,\ 0 + x^2\right) \cdot (0,\ 0,\ -1)\ dS = -\iint_{S_1} x^2\ dS$$

onde S_1 é dada por $z = 0$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 9$, e, $\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$. Logo:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 0 + 0}\ dxdy = dxdy\,.$$

Então,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = -\iint_D x^2\ dxdy \ \text{(em coordenadas polares)} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta\ drd\theta = -\frac{3^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta\ d\theta =$$

$$= -\frac{3^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = -\frac{81\pi}{4}\,.$$

Logo:

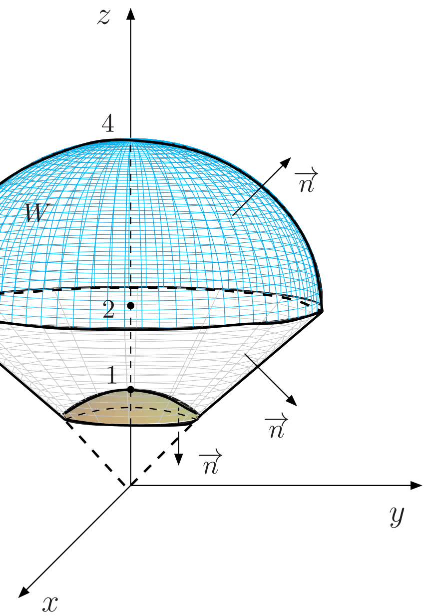
$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \frac{81\pi}{4}\,.$$

Exercício 4: Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{3} + y,\ \frac{y^3}{3},\ \frac{z^3}{3} + 2\right)$ através da superfície S do sólido W, definido por:

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\,,\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4\,,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.

Solução: A figura que se segue mostra o sólido W.



Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \text{div}\,\vec{F}\ dxdydz =$$

$$= \iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)\ dxdydz =$$

$$= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta$$

onde

$$W_{\rho\phi\theta} = \left\{(\rho,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\,,\ 1 \le \rho \le 4\cos\phi\right\}\ .$$

Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_1^{4\cos\phi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta =$$

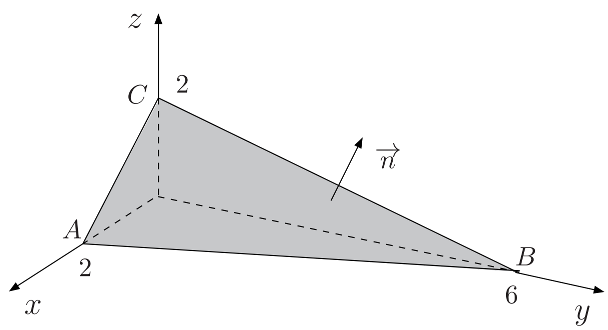
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^{4\cos\phi} d\phi d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \left(4^5\cos^5\phi\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi\right)\ d\phi d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left[-\frac{4^5}{6}\cos^6\phi + \cos\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta = \frac{1}{5}\left(-\frac{4^5}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^6 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4^5}{6} - 1\right)\int_0^{2\pi} d\theta =$$

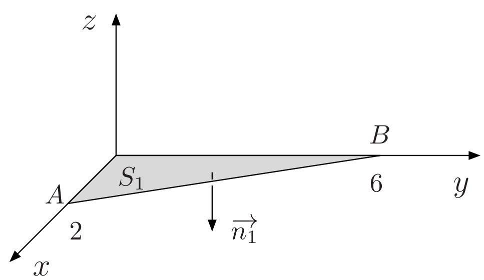
$$= \frac{2\pi}{5}\left(\frac{4^5}{6}\cdot\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{4^3\cdot 7}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{445}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)\ .$$

Exercício 5: Seja $\mathcal{T}$ o tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (2,0,0)$, $B = (0,6,0)$ e $C = (0,0,2)$. Sejam S a superfície lateral de $\mathcal{T}$ constituída pelas faces de $\mathcal{T}$ que não estão no plano xy e $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y+z,\ x+4z,\ 2y+x)$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$. Calcule $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$, com a normal exterior a S.

Solução: A figura que se segue mostra o tetraedro $\mathcal{T}$.



Notemos que $\partial\mathcal{T} = S \cup S_1$ onde S_1 é a porção do plano $z = 0$, limitada pelo triângulo de vértices O, A e B. Considere $\overrightarrow{n_1}$ o vetor unitário normal a S_1 igual a $-\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



Como $\partial\mathcal{T}$ está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Gauss. Temos:

$$\iint_{\partial\mathcal{T}} \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iiint_W \text{div rot}\,\overrightarrow{F}\ dxdydz = 0,$$

pois $\text{div rot}\,\overrightarrow{F} = 0$ (conforme observação importante) ou

$$\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \iint_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\,dS = 0\,.$$

Temos

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y+z & x+4z & 2y+x \end{vmatrix} = (2-4,\ 1-1,\ 1-3) = (-2,\ 0,\ -2)\,.$$

Logo:

$$\iint_{S_1} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n_1}\,dS = \iint_{S_1} (-2,0,-2)\cdot(0,0,-1)\,dS =$$

$$= 2\iint_{S_1} dS = 2A(S_1) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6 = 12\,.$$

Portanto,

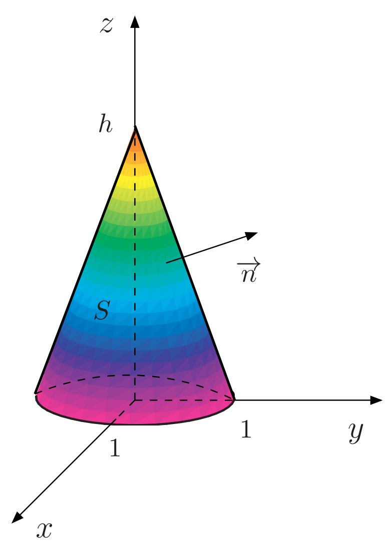
$$\iint_{S} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -12\,.$$

Exercício 6: Seja a superfície cônica S de vértice $(0,0,h)$ e de base situada no plano xy, com raio 1 e $\vec{n}$, com a componente $\vec{\mathbf{k}}$ não negativa. Seja

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{i}} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{j}} + 2(z+1)\,\vec{\mathbf{k}}$$

sendo $f(x,y,z)$ de classe C^2. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

Solução: A superfície S *não fechada* pode ser visualizada na figura que se segue.



Como $\vec{n}$ tem a componente $\vec{\mathbf{k}}$ não negativa, então $\vec{n}$ é exterior a S. Temos

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + 2 = 2$$

pois f é de classe C^2 e, portanto, vale aqui o teorema de Schwartz.

Para aplicarmos o teorema de Gauss, devemos considerar o sólido W limitado por S e S_1, porção do plano $z=0$, com $x^2+y^2\leq 1$, orientada com $\vec{n_1} = -\vec{\mathbf{k}}$. Temos então,

$$\iint_{S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\,dS = \iiint_{W} \text{div}\,\vec{F}\;dxdydz =$$

$$= 2V(W) = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot h = \frac{2\pi h}{3}\,.$$

Mas,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{S_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,0),\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,0),\ 2(0+1) \right) \cdot (0,0,-1)\, dS =$$

$$= \iint_{S_1} (-2)\, dS = -2A(S_1) = -2\pi\,.$$

Logo:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \frac{2\pi}{3}(h+3)\,.$$

Exercício 7: Seja Q uma carga elétrica localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x,y,z), com vetor posição X é

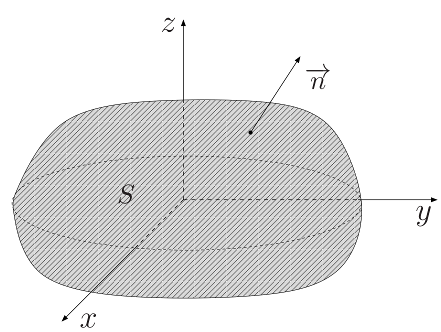
$$\overrightarrow{F}(X) = \frac{\varepsilon q Q}{\|X\|^3} X$$

onde ε é uma constante. Considere a força por unidade de carga

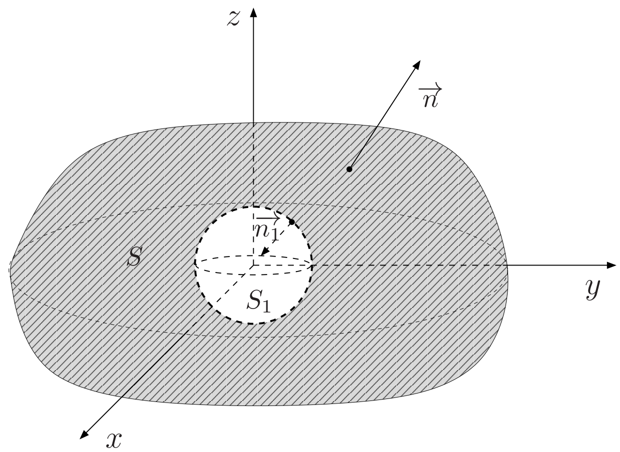
$$\overrightarrow{E}(X) = \frac{1}{q}\overrightarrow{F}(X) = \frac{\varepsilon Q}{\|X\|^3} X = \varepsilon Q\, \frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

que é chamada campo elétrico de Q. Mostre que o fluxo elétrico de $\overrightarrow{E}$ é igual a $4\pi\varepsilon Q$, através de qualquer superfície fechada S que contenha a origem, com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora se S. Esta é a Lei de Gauss para uma carga simples.

Solução: Seja S uma superfície fechada contendo a origem.



Seja W a região sólida limitada por S. Como W não está contida no domínio de $\overrightarrow{E}$, $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, então não podemos aplicar o teorema de Gauss no cálculo de $\iint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\; dS$. Então consideremos uma esfera $S_1 : x^2+y^2+z^2 = a^2$, com $a > 0$ tal que $S_1 \subset W$.



Seja W_1 a região sólida limitada por S e S_1. Logo, $W_1 \subset \text{dom}\overrightarrow{E}$. Temos $\partial W_1 = S \cup S_1$. Seja $\overrightarrow{n_1}$ a normal a S_1 apontando para o interior de S_1. Como ∂W_1 está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Gauss. Temos então,

$$\iint_{\partial W_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_{W_1} \text{div}\overrightarrow{E}\, dxdydz$$

ou

$$\iint_{S} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iiint_{W_1} \text{div}\overrightarrow{E}\, dxdydz\,.$$

Verifique que $\text{div}\overrightarrow{E} = 0$. Então,

$$\iint_{S} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = -\iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot (-\overrightarrow{n_1})\, dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot (-\overrightarrow{n_1})\, dS$

Se $\overrightarrow{n_1}$ aponta para o interior de S_1, então $-\overrightarrow{n_1}$ aponta para o exterior de S_1. Logo, $-\overrightarrow{n_1} = \dfrac{(x,y,z)}{a}$. Então,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot (-\overrightarrow{n_1})\, dS = \iint_{S_1} \frac{\varepsilon Q(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{(x,y,z)}{a}\, dS =$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a} \iint_{S_1} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a} \iint_{S_1} \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS =$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q\,.$$

Exercício 8: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, tal que $\nabla^2 f = x^2+y^2+z^2$. Calcule $\displaystyle\iint_S \nabla f \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ com $\overrightarrow{n}$ exterior a S.

Solução: Seja W a região sólida limitada por S. Pelo teorema de Gauss, temos

$$\iint_S \nabla f \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_W \nabla \cdot \nabla f\ dxdydz = \iiint_W \nabla^2 f\ dxdydz =$$

$$= \iiint_W \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \\ dxdydz = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}$$

e $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Então,

$$\iint_S \nabla f \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta =$$

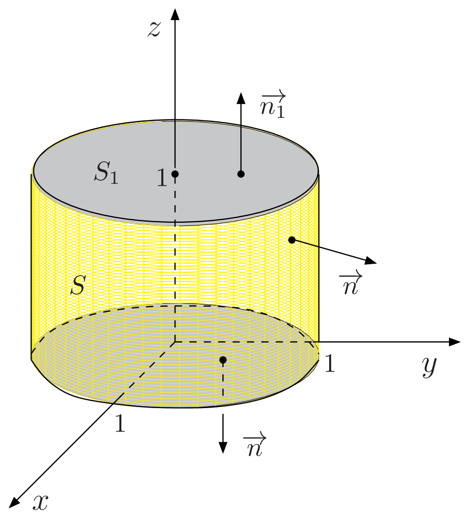
$$= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta = \int_0^1 \rho^4 \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^4 \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\ d\phi d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho \Big[-\cos\phi\Big]_0^\pi\ d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho^4\ d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}\,.$$

Exercício 9: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, tal que $\nabla^2 f = x^2 + y^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) = \dfrac{1}{3}$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$, onde S é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z = 0$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de S.

Solução: Seja $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é a tampa da lata. Logo, S_1 é dada por $S_1 : z = 1$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ e com $\vec{n}_1 = \vec{k}$ e $dS = dx\,dy$.



Seja W o sólido limitado por S. Pelo teorema de Gauss, temos:

$$\iint_{\overline{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iint_{\overline{S}} \nabla f \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \nabla \cdot \nabla f\, dV =$$

$$= \iiint_W \nabla^2 f\, dV = \iiint_W \left(x^2 + y^2\right)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r^3\, dr\, dz\, d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi}\int_0^1 dz\, d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Mas

$$\iint_{\overline{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS + \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1}\, dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1}\, dS$

Temos

$$\iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1}\, dS = \iint_{S_1} \nabla f \cdot \vec{n}_1\, dS =$$

$$= \iint_{S_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,1), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,1), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1)\right) \cdot (0,0,1)\, dS =$$

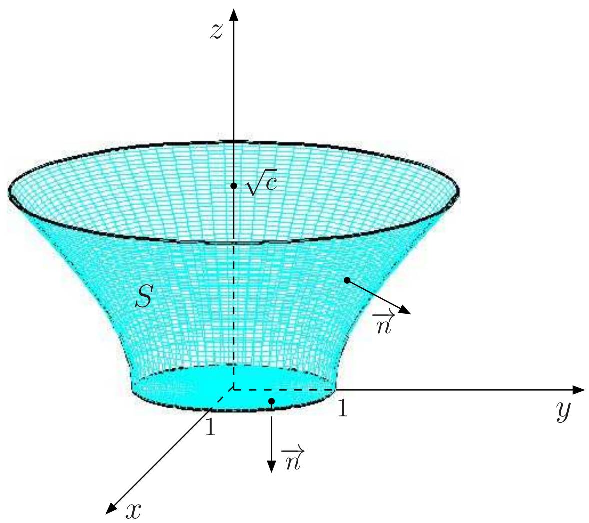
$$= \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1)\, dS = \iint_{S_1} \frac{1}{3}\, dS = \frac{1}{3}\, A(S_1) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

Logo:

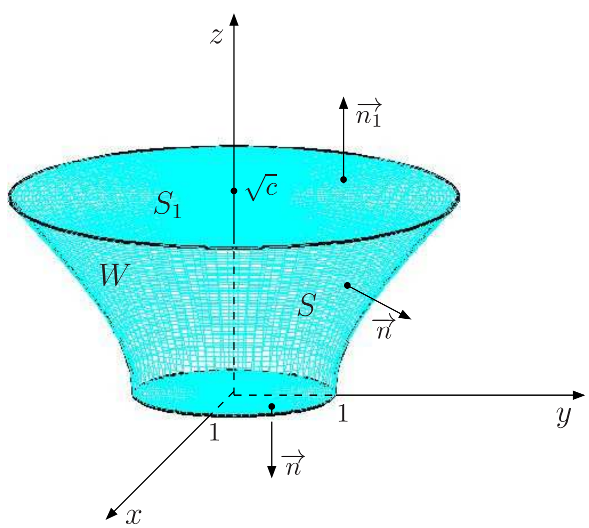
$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Exercício 10: Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{-cy}{2} + ze^x,\ \dfrac{cx}{2} - ze^y, xy \right)$, com $c > 0$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e S a superfície aberta, união do hiperboloide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{c}$ com o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Calcule o valor de c sabendo que $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = -6\pi$, onde $\overrightarrow{n}$ é o campo de vetores normais apontando para fora de S.

Solução: De $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e $z = \sqrt{c}$ temos $x^2 + y^2 = 1 + c$. Logo, a interseção do hiperboloide com o plano $z = \sqrt{c}$ é a circunferência $x^2 + y^2 = = \left(\sqrt{1+c}\right)^2$, contida no plano $z = \sqrt{c}$. O esboço de S está representado na figura que se segue.



Para aplicar o teorema de Gauss, devemos fechar S com S_1, porção do plano $z = \sqrt{c}$, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{1+c}\right)^2$. Seja W a região compacta do $\mathbb{R}^3$, tal que $\partial W = S \cup S_1$. O esboço de ∂W está representado na figura que se segue.



Do teorema de Gauss, temos que:

$$\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS + \iint_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\ dS = \iiint_W \text{div}\left(\text{rot}\,\overrightarrow{F}\right) dV\,.$$

Levando em conta que $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = -6\pi$ e div $\left(\text{rot}\,\overrightarrow{F}\right) = 0$, então:

$$\iint_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\,dS = 6\pi \qquad (1)$$

Mas

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-cy}{2} + ze^x & \dfrac{cx}{2} - ze^y & xy \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x + e^y, e^x - y, \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right) = (x + e^y, e^x - y, c)$$

e S_1 é dada por $S_1 : z = \sqrt{c}$, $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{1+c}\right)^2$ com $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{k}$ e $dS = dxdy$. Então,

$$\iint_{S_1} \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\,dS = \iint_D (x + e^y, e^x - y, c)\cdot(0,0,1)\,dxdy =$$

$$= c\iint_D dxdy = cA(D) = c\left[\pi\left(\sqrt{1+c}\right)^2\right] = \pi c(1+c)\,.$$

Substituindo em (1), temos

$$\pi c(1+c) = 6\pi \quad \Leftrightarrow \quad c^2 + c - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow c = 2 \text{ ou } c = -3\,.$$

Como $c > 0$ então $c = 2$.