Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

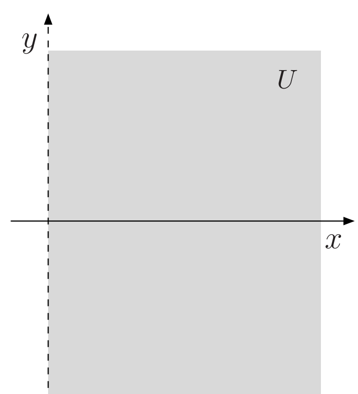
Cálculo III-A – Lista 14

Exercício 1: Mostre que

$$I = \int_C (1 + 2xy + \ln x)\ dx + x^2\ dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de I onde C é dada por $\gamma(t) = = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

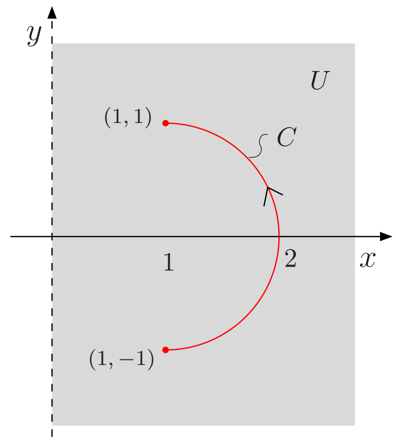
Solução: Seja $\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (1 + 2xy + \ln x, x^2)$ que é de classe C^1 no conjunto aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$.



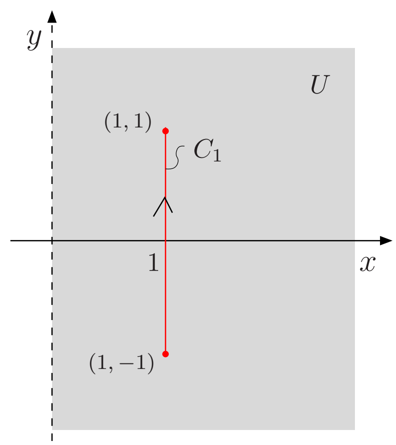
Como U é um conjunto simplesmente conexo e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, então, pelo teorema das equivalências, segue que a integral de linha I é independente do caminho.

Esboço de C

Temos que $\gamma(-\pi/2) = (1, -1)$ e $\gamma(\pi/2) = (1, 1)$. As equações de C são $x = 1 + \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Logo, $(x - 1)^2 = \cos^2 t$ e $y^2 = \operatorname{sen}^2 t$ portanto $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Então C é o arco da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, percorrido no sentido anti-horário que vai de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.



Como a integral de linha não depende do caminho, vamos substituir a curva C pelo segmento de reta C_1 que liga $(1,-1)$ a $(1,1)$.



Temos $C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$, com $-1 \leq t \leq 1$, portanto $dx = 0$ e $dy = dt$. Logo,

$$I = \int_{C_1} (1 + 2xy + \ln x)\ dx + x^2\ dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 0 + 1^1\ dt = \int_{-1}^{1} dt = \big[t\big]_{-1}^{1} = 2\,.$$

Exercício 2: Calcule

$$I = \int_C (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x)\,dx + (xe^{xy} + ze^{yz})\,dy + (xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z)\,dz$$

onde C é a curva dada por $\gamma(t) = t^2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (t-1)(t-3)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \pi t^3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, com $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x,\ xe^{xy} + ze^{yz},\ xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z)$$

definido em $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\text{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ze^{xz} + ye^{xy} + 6x & xe^{xy} + ze^{yz} & xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z \end{vmatrix} =$$

$$= \big(e^{yz} + yze^{yz} - e^{yz} - yze^{yz},\ e^{xz} + xze^{xz} - e^{xz} - xze^{xz},\ e^{xy} - xye^{xy} -$$

$$- e^{xy} - xye^{xy}\big) = (0,0,0) = \overrightarrow{0}\ .$$

Como dom$\overrightarrow{F}$ é um conjunto simplesmente conexo e rot$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, pelo teorema das equivalências, temos que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Logo, existe $\varphi(x,y,z)$, tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ em $\mathbb{R}^3$.

Para encontrar uma $\varphi(x,y,z)$, devemos resolver

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ze^{xz} + ye^{xy} + 6x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^{xy} + ze^{yz} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z \qquad (3)$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a x, y e z respectivamente,

$$\varphi(x,y,z) = e^{xz} + e^{xy} + 3x^2 + f(y,z) \qquad (4)$$

$$\varphi(x,y,z) = e^{xy} + e^{yz} + g(x,z) \qquad (5)$$

$$\varphi(x,y,z) = e^{xz} + e^{yz} + \cos z + h(x,y) \qquad (6)$$

Comparando (4), (5) e (6), temos que $f(y,z) = e^{yz} + \cos z,\ g(x,z) = e^{xz} + + 3x^2 + \cos z$ e $h(x,y) = e^{xy} + 3x^2$. Logo, $\varphi(x,y,z) = e^{xz} + e^{xy} + e^{yz} + 3x^2 + \cos z$. Então $I = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))$ onde $\gamma(1) = (1,0,\pi)$ e $\gamma(0) = (0,3,0)$. Logo,

$$I = \varphi(1,0,\pi) - \varphi(0,3,0) =$$

$$= (e^{\pi} + e^0 + e^0 + 3 + \cos\pi) - (e^0 + e^0 + e^0 + 3\cdot 0^2 + \cos 0) =$$

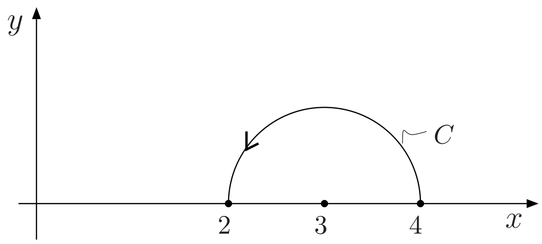
$$= e^{\pi} + 4 - 4 = e^{\pi}\ .$$

Exercício 3: Calcule

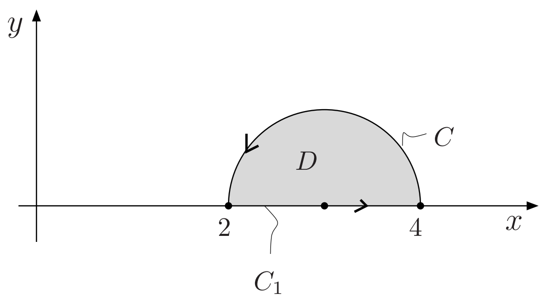
$$\int_C \left(e^x \operatorname{sen} y - 2y - \pi\right)\ dx + \left(e^x \cos y + e^y\right)\ dy$$

ao longo de $C : (x-3)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de $(4,0)$ para $(2,0)$.

Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.



Ora, calcular a integral usando a definição é uma tarefa muito complicada. Como rot$\overrightarrow{F} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} =$ $(e^x \cos y - e^x \cos y + 2)\ \overrightarrow{\mathbf{k}} = 2\overrightarrow{\mathbf{k}} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo. Assim, só nos resta usar o teorema de Green. Para isso, fechemos a curva C através do segmento C_1 que liga $(2,0)$ a $(4,0)$.



Seja D a região limitada por $\overline{C} = C \cup C_1$. Como estamos nas condições do teorema de Green, temos

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dxdy =$$

$$= 2\iint_D dxdy = 2\,A(D) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $2 \leq x \leq 4$ portanto $dy = 0$. Então,

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} P(x,0)\ dx + Q(x,0) \cdot 0 =$$

$$= \int_2^4 \left(e^x \operatorname{sen} 0 - 2 \cdot 0 - \pi\right)\ dx = -2\pi\,.$$

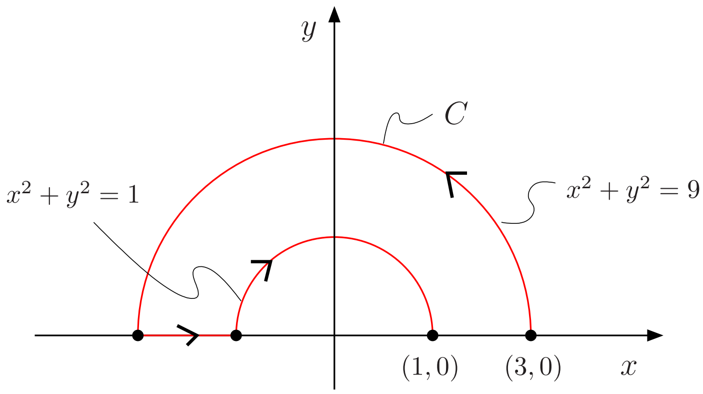
Logo,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \pi + 2\pi = 3\pi \,.$$

Exercício 4: Calcule

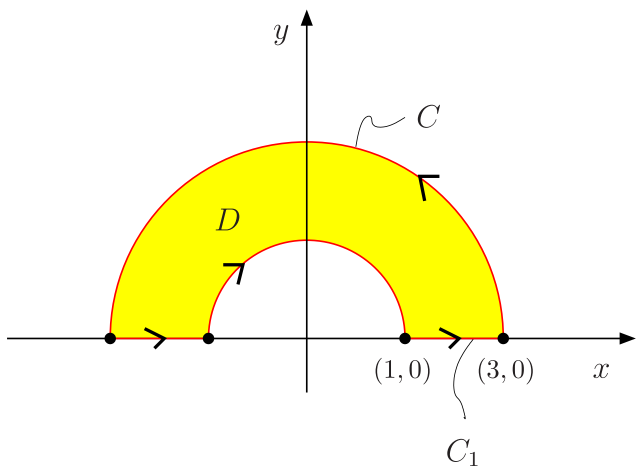
$$\int_C \left(x^2 - y^2\right) dx + \left(\operatorname{arctg} y + x^2\right) dy$$

onde C é a curva aberta que vai de $(3,0)$ a $(1,0)$, ilustrada na figura que se segue.



Solução: Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = (P,Q) = (x^2 - y^2, \operatorname{arctg} y + x^2)$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então temos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y \neq 0$. Logo, $\overrightarrow{F}$ não é conservativo. Para usar o teorema de Green, devemos fechar a curva C, por meio do segmento de reta C_1 que liga $(1,0)$ a $(3,0)$.

Seja D a região limitada por $\overline{C} = C \cup C_1$.



Como estamos nas condições do teorema de Green, temos

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \, dxdy =$$

$$= \iint_D 2x \; dxdy + \iint_D 2y \; dxdy \,.$$

Como $f(x,y) = 2x$ é uma função ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y, então $\iint\limits_D 2x \, dxdy = 0$. Utilizemos as coordenadas polares para calcular a outra integral. Temos

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 1 \leq r \leq 3 \end{cases}$. Portanto,

$$\iint\limits_D 2y \, dxdy = 2\int_0^\pi \int_1^3 (r\,\mathrm{sen}\,\theta) r \, drd\theta = 2\int_0^\pi \int_1^3 r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \, drd\theta =$$

$$= 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = \frac{2}{3}(27-1)\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = \frac{104}{3}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $1 \leq x \leq 3$ portanto $dy = 0$. Então,

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} P(x,0) \, dx = \int_1^3 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{3}\,.$$

Logo,

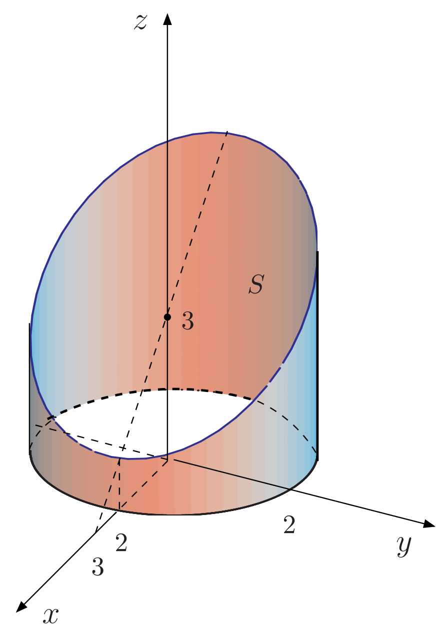
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{104}{3} - \frac{26}{3} = \frac{78}{3} = 26\,.$$

Exercício 5: Uma lâmina tem a forma da parte lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre os planos $z = 0$ e $z = 3 - x$. Determine a massa dessa lâmina se a densidade no ponto (x,y,z) é dada por $f(x,y,z) = x^2$.

Solução: Temos que

$$M = \iint\limits_S f(x,y,z) \, dS = \iint\limits_S x^2 \, dS$$

onde S está ilustrada na figura que se segue.



Uma parametrização para S é dada por $\varphi(t,z) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t,\ z)$ onde $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 3 - 2\cos t \end{cases}$.

Temos $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = (-2\,\text{sen}\, t,\ 2\cos t,\ 0)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = (0,0,1)$, portanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -2\,\text{sen}\, t & 2\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t,\ 0)\,.$$

Como $dS = \left\| \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \right\|\ dtdz$ então $dS = 2\ dtdz$. Logo,

$$M = \iint_D (2\cos t)^2 \cdot 2\ dtdz = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\cos t} \cos^2 t\ dzdt =$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} (3\cos^2 t - 2\cos^3 t)\ dt = 24 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt - 16 \int_0^{2\pi} \cos^3 t\ dt\,.$$

Temos

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\text{sen}\, 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

e

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\ dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - \text{sen}^2\, t)\ d(\text{sen}\, t) =$$

$$= \left[\text{sen}\, t - \frac{\text{sen}^3\, t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0\,.$$

Logo,

$$M = 24\pi \ \textit{u.m.}$$

Exercício 6: Seja C a curva $z = 2x^2$, com $0 \leq x \leq 2$, contida no plano xz. Seja S a superfície obtida girando C em torno do eixo z.

a) Parametrize S.
b) Calcule a área de S.

Solução:

a) Uma parametrização da curva C é dada por $x(t) = t$, $y(t) = 0$ e $z(t) = 2t^2$, com $0 \leq t \leq 2$. Logo, uma parametrização de S á dada por

$$\varphi(t,\theta) = \big(x(t)\cos\theta, x(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big) = \big(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, 2t^2\big)$$

com $(t,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

b) As derivadas parciais de φ são

$$\varphi_t = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 4t)$$

$$\varphi_\theta = (-t\operatorname{sen}\theta, t\cos\theta, 0)$$

e o produto vetorial é

$$\varphi_t \times \varphi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 4t \\ -t\operatorname{sen}\theta & t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(-4t^2\cos\theta, -4t^2\operatorname{sen}\theta, \underbrace{t\cos^2\theta + t\operatorname{sen}^2\theta}_{=\,t} \Big),$$

portanto

$$\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = \sqrt{16t^4\cos^2\theta + 16t^4\operatorname{sen}^2\theta + t^2} =$$

$$= \sqrt{16t^4 + t^2} = t\sqrt{16t^2+1}$$

pois $t > 0$. Como

$$A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\|\, dt d\theta ,$$

então

$$A(S) = \iint_D t\sqrt{16t^2+1}\; dtd\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} t\sqrt{16t^2+1}\; d\theta dt =$$

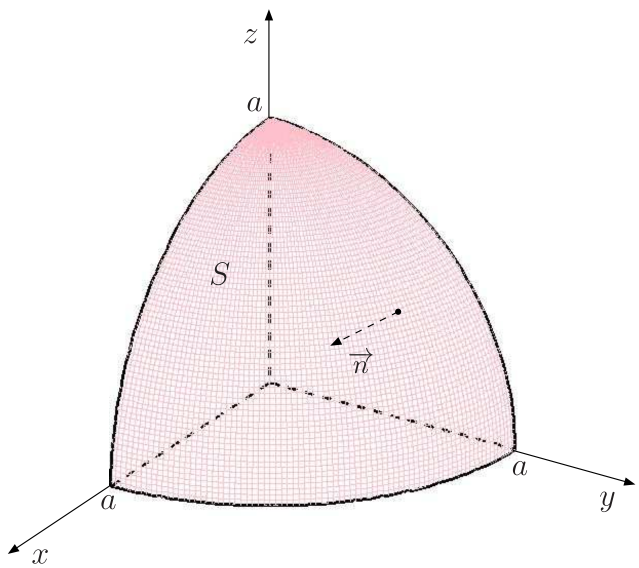
$$= 2\pi \int_0^2 \big(16t^2+1\big)^{1/2} t\; dt\,.$$

Fazendo $u = 16t^2 + 1$ temos $du = 32tdt$, portanto $tdt = du/32$. Para $t = 0$ temos $u = 1$ e para $t = 2$ temos $u = 65$. Então,

$$A(S) = 2\pi \int_1^{65} u^{1/2} \frac{du}{32} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_1^{65} = \frac{\pi}{24} (65\sqrt{65} - 1) \text{ u.a.}$$

Exercício 7: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ onde $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\mathbf{i}} - y\,\vec{\mathbf{j}}$ e S é parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ no primeiro octante e $\vec{n}$ apontando para a origem.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\vec{n}$ é dirigido para a origem, então $\vec{n}$ é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = = a^2$, isto é, $\vec{n} = \frac{(-x, -y, -z)}{a}$. Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (x, -y, 0) \cdot \frac{(-x, -y, -z)}{a}\, dS =$$

$$= \frac{1}{a} \iint_S \left(-x^2 + y^2 \right) dS\,.$$

Para calcular a integral, devemos parametrizar S. Temos

$$S : \varphi(\phi, \theta) = (a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi)$$

com $(\phi,\theta)\in D:\begin{cases}0\le\phi\le\pi/2\\0\le\theta\le\pi/2\end{cases}$. Da teoria, temos que $dS=a^2\operatorname{sen}\phi\;d\phi d\theta$. Então,

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS=$$

$$=\frac{1}{a}\iint_D\left(-a^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta\right)a^2\operatorname{sen}\phi\;d\phi d\theta=$$

$$=-a^3\iint_D\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}^3\phi\;d\phi d\theta=$$

$$=-a^3\iint_D\cos 2\theta\operatorname{sen}^3\phi\;d\phi d\theta=$$

$$=-a^3\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\phi\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\;d\theta d\phi=$$

$$=\frac{-a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\phi\Big[\operatorname{sen}2\theta\Big]_0^{\pi/2}d\phi=$$

$$=\frac{-a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\phi\Big(\underbrace{\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0}_{=\;0}\Big)d\phi=\frac{-a^3}{2}\int_0^{\pi/2}0\;d\phi=0\,.$$

Exercício 8: Considere o campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x+z\cos y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+(x-y+z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\left(z^4-3a^2\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

Seja S uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2=a^2$, com $0\le z\le\sqrt{a}$, $a>0$ e $x^2+y^2\le a^2$, $z=0$. Sabendo que o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de S, de dentro para fora é igual a πa^3, calcule o valor de a.

Solução: Consideremos $\overline{S}=S\cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1: z=\sqrt{a}$, com $(x,y)\in D: x^2+y^2\le a^2$. A superfície S_1 deve ser orientada com $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{k}$. Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos

$$\iint_S\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS+\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\;dS=\iiint_W \operatorname{div}\overrightarrow{F}\;dxdydz=$$

$$=\iiint_W\left(1-1+4z^3\right)dxdydz=4\iiint_W z^3\;dxdydz\,.$$

Como $\displaystyle\iint_S\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\;dS=\pi a^3$, então,

$$\pi a^3+\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\;dS=4\iiint_W z^3\;dxdydz \qquad (1)$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \\ dxdydz = rdrd\theta dz \end{cases}$$

e $W_{r\theta z}$ é dado por

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a} \end{cases}$$

Então,

$$\iiint\limits_{W} z^3\; dxdydz = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} z^3 r\; drd\theta dz = \int_0^a r \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}} z^3\; dzd\theta dr =$$

$$= \int_0^a r \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}}\; d\theta dr = \frac{a^2}{4}\int_0^a r \int_0^{2\pi}\; d\theta dr = \frac{\pi a^2}{2}\int_0^a r\; dr =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = \frac{\pi a^4}{4}\,.$$

Logo, de (1), temos

$$\pi a^3 + \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\; dS = \pi a^4 \qquad (2)$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\; dS$

Temos

$$\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\; dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} \left(x + \sqrt{a}\cos y\,,\; x - y + \sqrt{a}\,,\; a^2 - 3a^2\right) \cdot (0,0,1)\; dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} \left(-2a^2\right)\; dS = -2a^2 A(S_1) = -2a^2\pi a^2 = -2\pi a^4\,.$$

De (2) temos:

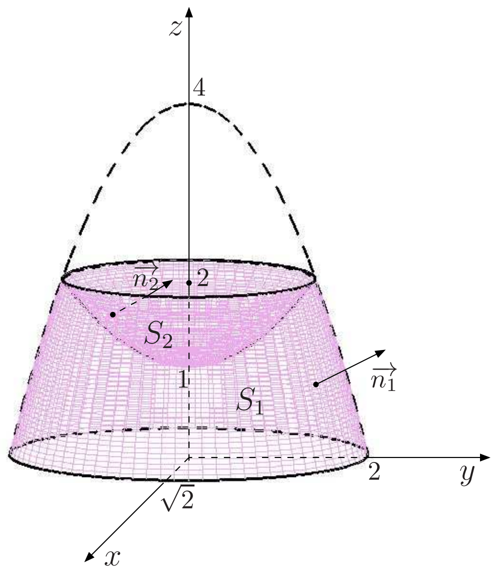
$$\pi a^3 - 2\pi a^4 = \pi a^4 \Rightarrow \pi a^3 = 3\pi a^4 \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\,.$$

Exercício 9: Calcule $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$ onde

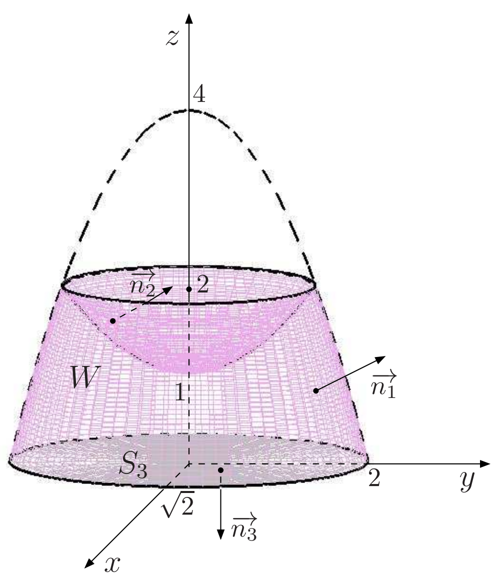
$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (-y + ze^x, x + \cos(yz), xy)$$

e S, orientada positivamente, é a reunião de S_1 e S_2 sendo S_1 dada por $z = = 4 - 2x^2 - y^2$, com $0 \leq z \leq 2$ e S_2 dada por $z = 1 + x^2 + \dfrac{y^2}{2}$, com $1 \leq z \leq 2$.

Solução: O esboço da superfície aberta $S = S_1 \cup S_2$ está representado na figura que se segue.



Para aplicar o teorema de Gauss, devemos fechar a superfície S através da superfície S_3, dada por $S_3 : z = 0$, com $(x, y) \in D : 2x^2 + y^2 \leq 4$ ou $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$, orientada com $\overrightarrow{n_3} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$.



Seja W o sólido limitado por $\overline{S} = S \cup S_3$. Como $\overrightarrow{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\overline{S} = \partial W$ está orientada positivamente, então podemos aplicar o teorema de Gauss. Temos,

$$\iint_{\overline{S}} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_W \text{div rot}\,\overrightarrow{F}\ dV\,.$$

Mas, por propriedades dos operadores diferenciais, temos que div rot$\overrightarrow{F} = 0$. Então,

$$\iint_{\overline{S}} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_W 0\ dV = 0$$

ou

$$\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS + \iint_{S_3} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS = 0\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_3} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS$

Temos

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\overrightarrow{F} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y + ze^x & x + \cos(yz) & xy \end{vmatrix} = \\ &= (x + y\,\text{sen}(yz), e^x - y, 1 - (-1)) = \\ &= (x + y\,\text{sen}(yz), e^x - y, 2)\ . \end{aligned}$$

Em S_3, onde $z = 0$, temos que rot$\overrightarrow{F} = (x, e^x - y, 2)$. Então,

$$\begin{aligned} &\iint_{S_3} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS = \iint_{S_3} (x, e^x - y, 2) \cdot (0, 0, -1)\ dS = \\ &= \iint_{S_3} -2\ dS = -2A(S_3) = -2\pi ab \end{aligned}$$

onde $a = \sqrt{2}$ e $b = 2$. Logo

$$\iint_{S_3} \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS = -4\sqrt{2}\pi$$

e, portanto

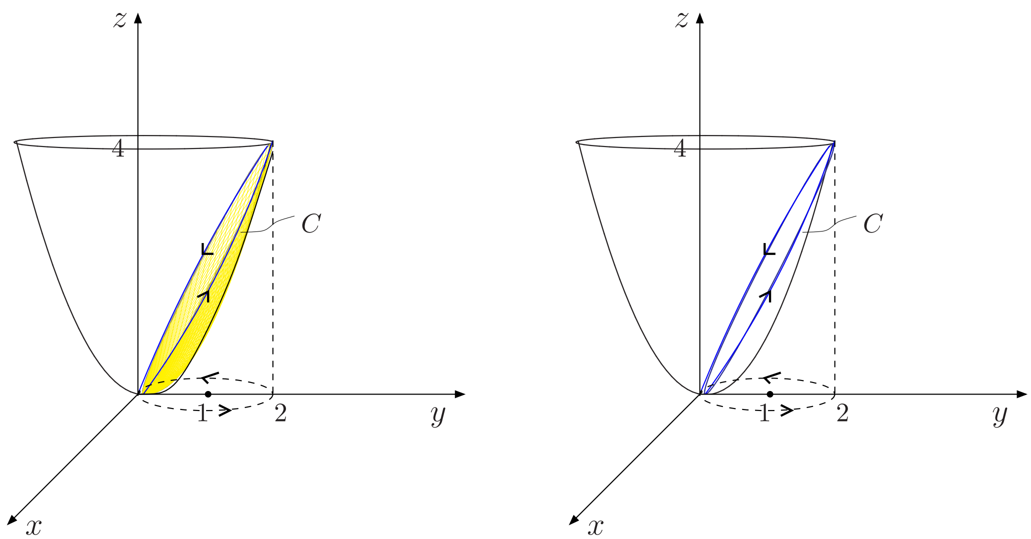
$$\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = 4\sqrt{2}\pi\,.$$

Exercício 10: Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = 2y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{x^2}{2}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \sqrt{1+z^8}\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

Calcule $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $x^2+(y-1)^2 = 1$ com um sentido de percurso tal que, quando projetado no plano $z = 0$ produz um percurso no sentido anti-horário.

Solução: O esboço de C é:



Considerando o sistema

$$\begin{cases} z &= x^2+y^2 \\ x^2+(y-1)^2 &= 1 \ \text{ ou } \ x^2+y^2 = 2y \end{cases}$$

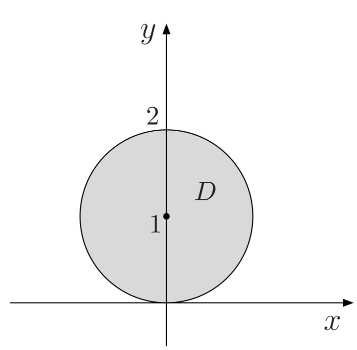
temos $z = 2y$. Isso significa que a curva interseção C está contida no plano $z = 2y$. Então, seja S a superfície porção do plano $z = 2y$, limitada por C. Logo, $\partial S = C$. Temos

$$S : z = 2y = f(x,y)$$

com

$$(x,y) \in D : x^2+(y-1)^2 \leq 1 \ \text{ ou } \ x^2+y^2 \leq 2y\,.$$

O esboço de D está representado na figura que se segue.



Como $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy$ então $dS = \sqrt{1+0+2^2}\, dxdy = = \sqrt{5}\, dxdy$. De acordo com a orientação de $C = \partial S$, devemos tomar $\overrightarrow{n}$ apontando para cima. Então

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{(0,-2,1)}{\sqrt{5}}\,.$$

Temos

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & \dfrac{x^2}{2} & \sqrt{1+z^8} \end{vmatrix} = (0, 0, x-2)\,.$$

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS =$$

$$= \iint_D (0,0,x-2) \cdot \frac{(0,-2,1)}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}\; dxdy = \iint_D (x-2)\; dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy = rdrd\theta \\ x^2+y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow r = 0 \;\text{ ou }\; r = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Do esboço de D, temos que $D_{r\theta}$ é dado por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$. Então,

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{D_{r\theta}} (r\cos\theta - 2)r\; drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} \left(r^2\cos\theta - 2r\right)\; drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} \left(r^2\cos\theta - 2r\right)\; drd\theta = \int_0^{\pi} \left[\cos\theta \frac{r^3}{3} - r^2\right]_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\; d\theta =$$

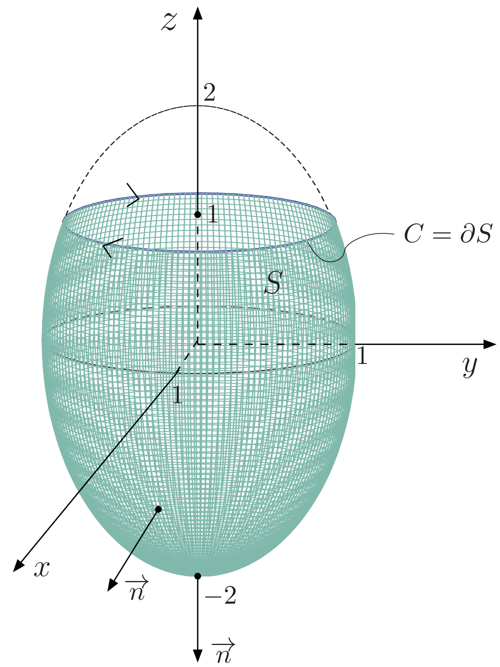
$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3}\cos\theta\,\text{sen}^3\,\theta - 4\,\text{sen}^2\,\theta\right)\; d\theta =$$

$$= \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{\text{sen}^4\,\theta}{4} - \frac{4}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = -2\pi\,.$$

Exercício 11: Use o teorema de Stokes para transformar a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS$ em uma integral de linha e calcule-a, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = = x\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + xy\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, através de $S : x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4} = 1$, $z \leq 1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,-2)$ esteja apontando para baixo.

Solução: De $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$ e $z = 1$, temos $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Logo, o bordo de S, ∂S é uma circunferência de raio $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ de centro no eixo z e contida no plano $z = 1$.

Os esboços de S e ∂S são



Como $\overrightarrow{n}$ é exterior a S então o bordo de S, ∂S, resulta com orientação horária. Parametrizando ∂S^-, temos $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t$ e $z = 2$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ portanto $dx = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t\ dt$, $dy = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t\ dt$ e $dz = 0$.

Do teorema de Stokes, temos

$$\iint_S \text{rot}\ \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \oint_{\partial S^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\oint_{\partial S^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} =$$

$$= -\oint_{\partial S^-} 0\ dx + x\ dy + xy\ dz = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\cos^2 t\ dt = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{3\pi}{4}\,.$$