

Calculo II -B-

Lista preparatoria para a segunda prova

1. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$, T de classe C^2 em \mathbb{R}^2 .

(a) Sabe-se que $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcular $\frac{\partial^2 U}{\partial^2 \theta}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

(b) Calcular a taxa de variação da temperatura na origem do disco na direção $x = y$ se $T(x, y) = \cos(x^2) + 2y$.

2. Calcular o maior volume que uma caixa retangular cuja superfície é $10m^2$ pode ter.

3. Considere a função $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$.

(a) Calcular os pontos críticos no retangulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e classificar três, a sua escolha.

(b) Escrever a aproximação quadrática da função f numa vizinhança do ponto (π, π) .

(c) Calcular um vetor perpendicular ao gráfico da função f no ponto (π, π) .

(d) Calcular a direção de crescimento máximo da função no ponto (π, π) .

4. Calcule a taxa de crescimento das funções f e g na direção do vetor unitario $u = (a, b)$ no ponto $(0, 0)$,

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases} \quad (b) g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases}$$

5. Mostre como o Teorema da função inversa decorre do Teorema da função implícita.

6. Em termos de quais variáveis o sistema

$$u_2 + u_1 + u_3 u_4 = 0, \quad u_3 u_1 u_2 + u_4 = 0$$

pode ser resolvido numa vizinhança do ponto $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$?

Se possível, calcular $\frac{\partial u_1}{\partial u_2}$.

7. Considere a transformação

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi.$$

(a) Para quais valores de (ρ, ϕ, θ) esta transformação é bijetora?

(b) Escrever a aproximação linear da inversa desta transformação numa vizinhança do ponto $\rho = 1, \phi = \pi/2, \theta = 0$.

8. Determinar se o conjunto definido implicitamente como $S = \{(x, y, z) : x^2 + xy + yz = 1\}$ é o gráfico de uma função numa vizinhança do ponto $(1, 0, 2)$.