Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 1 – Tutor

Exercício 1: Calcule as integrais iteradas:

a) $\displaystyle\int_1^2\int_1^2 ye^{xy}\,dxdy$ b) $\displaystyle\int_1^2\int_1^x \frac{x^2}{y^2}\,dydx$

Solução:

a) Temos

$$\int_1^2\int_1^2 ye^{xy}\,dxdy = \int_1^2 y\left[\frac{e^{xy}}{y}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_1^2 \left[e^{xy}\right]_{x=1}^{x=2} dy =$$
$$= \int_1^2 \left(e^{2y}-e^y\right)\,dy = \left[\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right]_1^2 = \left(\frac{e^4}{2}-e^2\right)-\left(\frac{e^2}{2}-e\right) = \frac{e^4}{2}-\frac{3e^2}{2}+e\,.$$

b) Temos

$$\int_1^2\int_1^x \frac{x^2}{y^2}\,dydx = \int_1^2\int_1^x x^2y^{-1}\,dydx = \int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{y=1}^{y=x} dx =$$
$$= \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+1\right)\,dx = \int_1^2\left(-x+x^2\right)\,dx =$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(-2+\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -2+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{5}{6}\,.$$

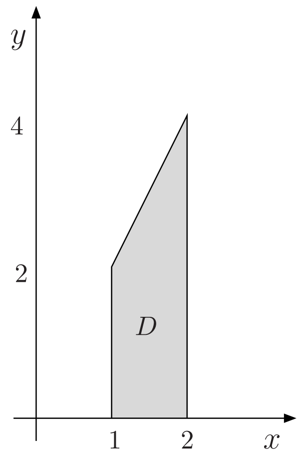
Exercício 2: Esboce a região de integração e calcule as integrais:

a) $\displaystyle\iint_D xy^3\,dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 2x\}$;

b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|\le \pi/2\,,\ 0\le y\le \cos x\}$, $f(x,y)=y\,\mathrm{sen}\,x$.

Solução:

a) O esboço de D está representado na figura que se segue.



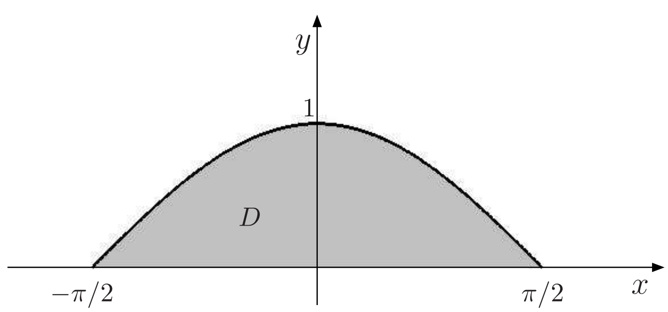
Temos

$$\iint\limits_D xy^3\,dxdy = \int_1^2 \int_0^{2x} xy^3\,dydx = \int_1^2 x\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{2x} dx =$$

$$= \int_1^2 x\left(\frac{16x^4}{4} - 0\right) dx = \int_1^2 4x^5\,dx =$$

$$= 4\left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^6 - 1\right) = \frac{2}{3}(64-1) = 42\,.$$

b) O esboço de D está representado na figura que se segue.



Temos

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D y \operatorname{sen} x\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\,dydx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,d(\cos x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{6}(0-0) = 0\,.$$

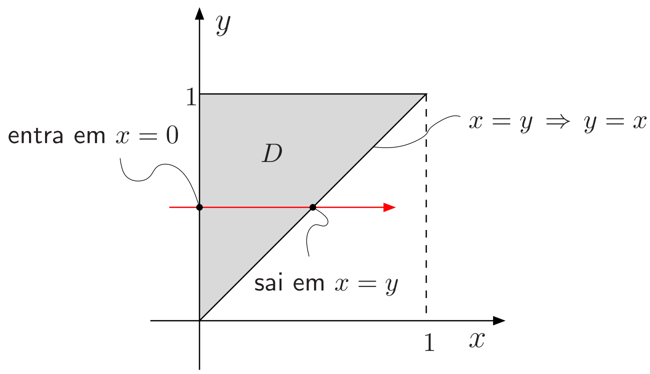
Exercício 3: Esboce a região de integração e inverta a ordem das integrais iteradas em:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y f(x,y)\ dxdy$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx$

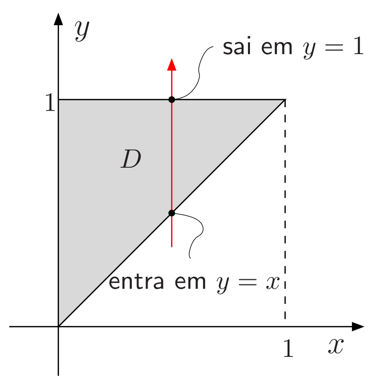
b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$ d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{3x} f(x,y)\ dydx$

Solução:

a) A região de integração D é dada pelas desigualdades $0 \le x \le y$ e $0 \le y \le 1$. Portanto, D é do tipo II e está limitada à esquerda pela reta $x = 0$ (eixo y) e à direita pela reta $x = y$, entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$.



Para inverter a ordem de integração devemos enquadrar D como tipo I. Então imaginemos uma reta vertical através de D, orientada como o eixo y.



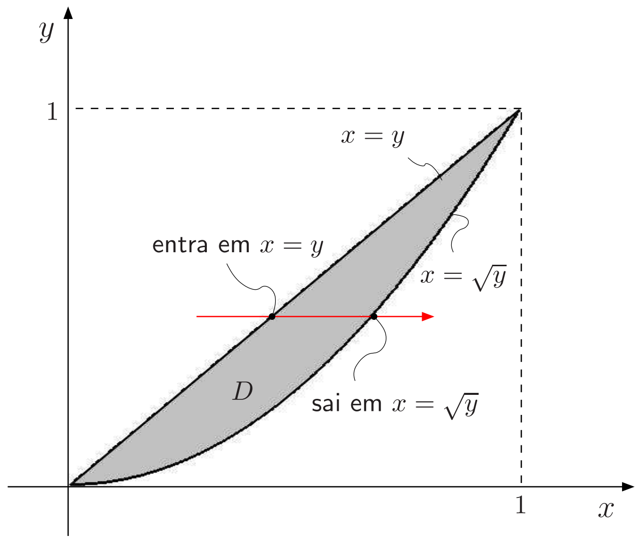
A reta entra em D em $y = x$ e sai de D em $y = 1$. Logo, $x \le y \le 1$. Como a projeção de D sobre o eixo x é o intervalo $[0,1]$, temos $0 \le x \le 1$. Assim,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1\,,\ x \le y \le 1\right\}\ .$$

Logo,

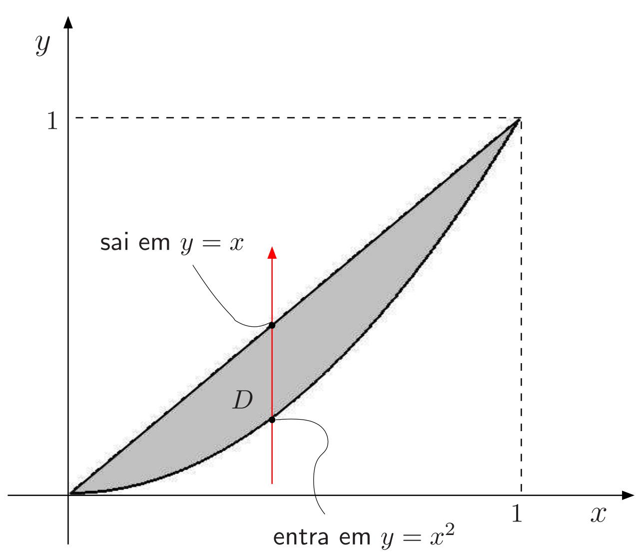
$$\int_0^1\int_0^4 f(x,y)\ dxdy = \int_0^1\int_x^1 f(x,y)\ dydx\,.$$

b) A região de integração D é dada pelas desigualdades $0 \le y \le 1$ e $y \le x \le \sqrt{y}$. Portanto, D é do tipo II e está limitada à esquerda pela reta $x = y$ (ou $y = x$) e à direita pela curva $x = \sqrt{y}$ (ou $y = x^2$, com $x > 0$), entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$.



Para inverter a ordem de integração devemos enquadrar D como tipo I. Então imaginemos uma reta vertical através de D, orientada como o eixo y. Vemos que ela entra em D em $y = x^2$ e sai de D em $y = x$. Vemos também que D está compreendida entre as retas $x = 0$ e $x = 1$. Então, temos:

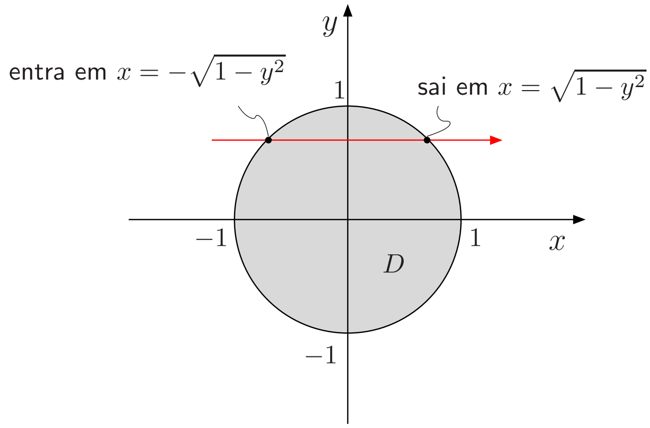
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y \leq x\,,\ 0 \leq x \leq 1\right\}\ .$$



Logo,

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\ dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x, y)\ dydx\,.$$

c) A região de integração D é dada pelas desigualdades $-1 \leq x \leq 1$ e $-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$. Portanto, D é do tipo I e está limitada inferiormente pela curva $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (ou $x^2 + y^2 = 1$, com $y \leq 0$) e superiormente pela curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ (ou $x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$), entre as retas $x = -1$ e $x = 1$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



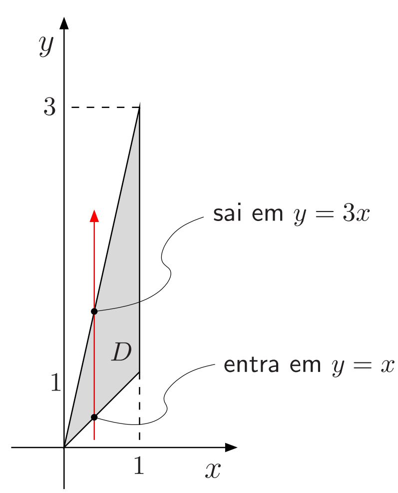
Para inverter a ordem de integração, devemos definir D como tipo II. Então, considerando uma reta horizontal através de D, orientada como o eixo X, vemos que ela entra em D em $x = -\sqrt{1-y^2}$ e sai de D em $x = \sqrt{1-y^2}$. Vemos, também, que D está compreendida entre as retas horizontais $y = -1$ e $y = 1$. Então,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1\,,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}\ .$$

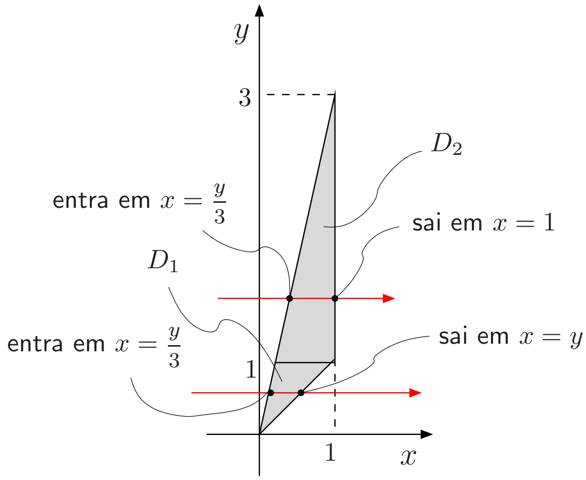
Logo,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dxdy\,.$$

d) A região de integração D é dada pelas desigualdades $x \leq y \leq 3x$ e $0 \leq x \leq 1$. Portanto, D é do tipo I e está limitada inferiormente pela reta $y = x$ (ou $x = y$) e superiormente pela reta $y = 3x$ (ou $x = y/3$), entre as retas verticais $x = 0$ (eixo y) e $x = 1$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Na figura vemos que D não é do tipo II, pois está limitada à esquerda pelas curvas $x = y$ e $x = y/3$. Para inverter a ordem de integração, devemos decompor a região D em duas partes: D_1 e D_2, como representado na figura que se segue.

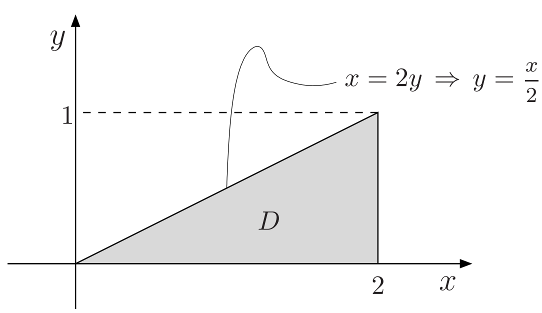


Temos $D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y/3 \leq x \leq y \end{cases}$ e $D_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 3 \\ y/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Então,

$$\int_0^1 \int_x^{3x} f(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_{y/3}^{y} f(x,y)\, dxdy + \int_1^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y)\, dxdy\,.$$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^{2} 4e^{x^2} dxdy$.

Solução: Não podemos integrar nessa ordem, pois $\displaystyle\int e^{x^2} dx$ não é uma função elementar, isto é, ela não pode ser escrita como uma soma finita de funções elementares (funções estudadas em Cálculo I). Portanto, devemos inverter a ordem de integração. A região de integração D é dada pelas desigualdades $0 \leq y \leq 1$ e $2y \leq x \leq 2$. Assim, D é do tipo II e está limitada à esquerda pela reta $x = 2y$ (ou $y = x/2$) e à direita pela reta $x = 2$, entre as retas horizontais $y = 0$ (eixo x) e $y = 1$.



Descrição de D como tipo I

Imaginemos uma reta vertical através de D, orientada como o eixo y. Ela entra em D em $y = 0$ e sai de D em $y = x/2$. Vemos que D está entre as retas $x = 0$ (eixo y) e a reta $x = 2$. Então,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2\,,\, 0 \leq y \leq x/2\right\}\,.$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_{2y}^{2} 4e^{x^2} dxdy = \int_0^2 \int_0^{x/2} 4e^{x^2} dydx = \int_0^2 4e^{x^2} \int_0^{x/2} dydx = \int_0^2 4e^{x^2} \frac{x}{2}\, dx = \int_0^2 e^{x^2} 2x\, dx\,.$$

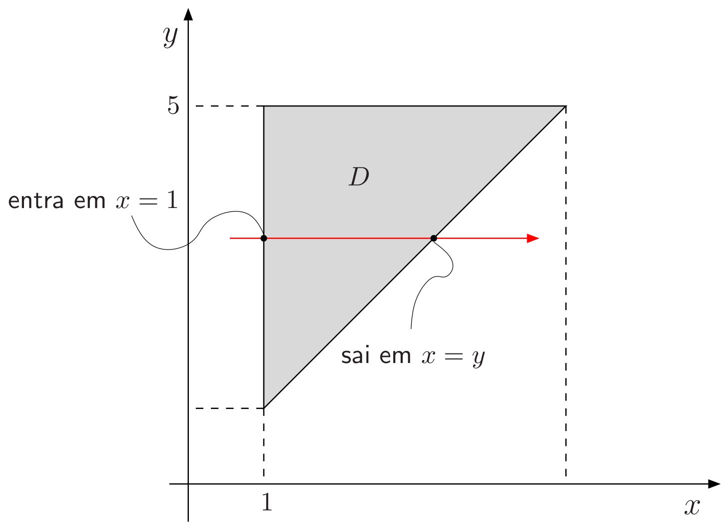
Fazendo $u = x^2$, temos $du = 2x\ dx$. Para $x = 0$, temos $u = 0$ e, para $x = 2$, temos $u = 4$. Então,

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dxdy = \int_0^4 e^u\ du = \Big[e^u\Big]_0^4 = e^4 - 1\,.$$

Exercício 5: Calcule $\displaystyle\int_1^5 \int_x^5 \frac{y}{x \ln y}\ dydx\,.$

Solução: Não podemos integrar nessa ordem, pois $\displaystyle\int \frac{y}{x\ln y}\ dy$ não é uma função elementar.

Então vamos inverter a ordem de integração. Para isso devemos esboçar a região de integração D dada pelas desigualdades $1 \leq x \leq 5$ e $x \leq y \leq 5$. Logo, a região é do tipo I e está limitada inferiormente pela reta $y = x$ e superiormente pela reta $y = 5$ e está compreendida entre as retas verticais $x = 1$ e $x = 5$.



Descrição de D como tipo II

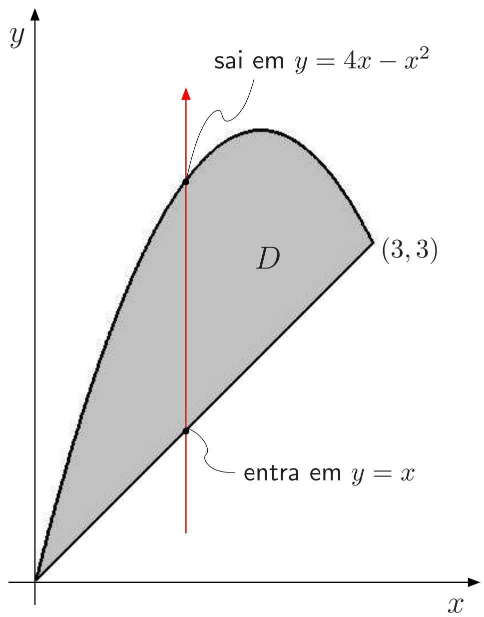
Imaginemos uma reta horizontal, através de D, orientada como o eixo x. Vemos que ela entra em D em $x = 1$ e sai de D em $x = y$. Vemos, também que D está entre as retas horizontais $y = 1$ e $y = 5$. Assim, $D : \begin{cases} 1 \leq y \leq 5 \\ 1 \leq x \leq y \end{cases}$. Então,

$$\int_1^5 \int_x^5 \frac{y}{x\ln y}\ dydx = \int_1^5 \int_1^y \frac{y}{x\ln y}\ dxdy = \int_1^5 \frac{y}{\ln y}\Big[\ln x\Big]_1^y dy =$$

$$= \int_1^5 \frac{y}{\ln y}\left(\ln y - \ln 1\right)\ dy = \int_1^5 \frac{y}{\ln y} \cdot \ln y\, dy = \int_1^5 y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^5 = \frac{1}{2}\left(5^2 - 1\right) = 12\,.$$

Exercício 6: Use a integral dupla para calcular a área da região D limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$.

Solução: De $y = 4x - x^2$ e $y = x$ temos $4x - x^2 = x$ ou $x^2 - 3x = 0$ ou $x(x-3) = 0$, portanto $x = 0$ ou $x = 3$. Logo, as interseções são $(0,0)$ e $(3,3)$ e o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrevendo D como uma região do tipo I, temos $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$. Como $A(D) = \iint\limits_D dxdy$, temos

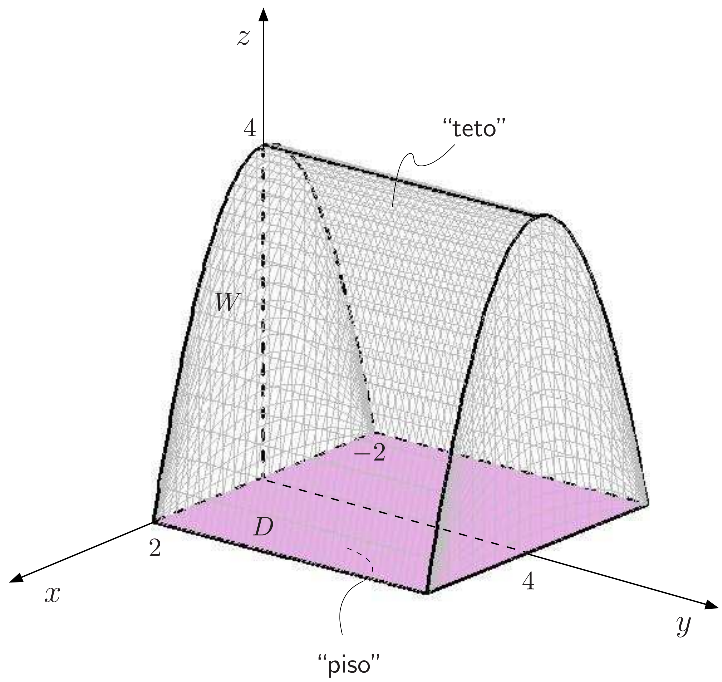
$$A(D) = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} dydx = \int_0^3 \left(4x - x^2 - x\right) dx =$$
$$= \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$
$$= \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Exercício 7: Encontre o volume do sólido W limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$ $y = 4$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$.

Solução:

Esboço do sólido W

Inicialmente traçamos, no plano xz, a parábola $z = 4 - x^2$. Como esta equação é independente da variável y, traçamos, por pontos desta parábola, as retas paralelas ao eixo y. Obtemos assim o cilindro parabólico. Considerando que W está limitado pelos planos $y = 0$, $y = 4$ e $z = 0$, temos o sólido W representado na figura que se segue.



Observemos que o "teto" do sólido W é o cilindro parabólico $z = 4 - x^2 = f(x, y)$ e que o "piso" de W é o quadrado D dado pelas desigualdades $-2 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4$. Temos, então,

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \left(4 - x^2\right)\,dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_0^4 \left(4 - x^2\right)\,dydx = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\int_0^4 dydx =$$

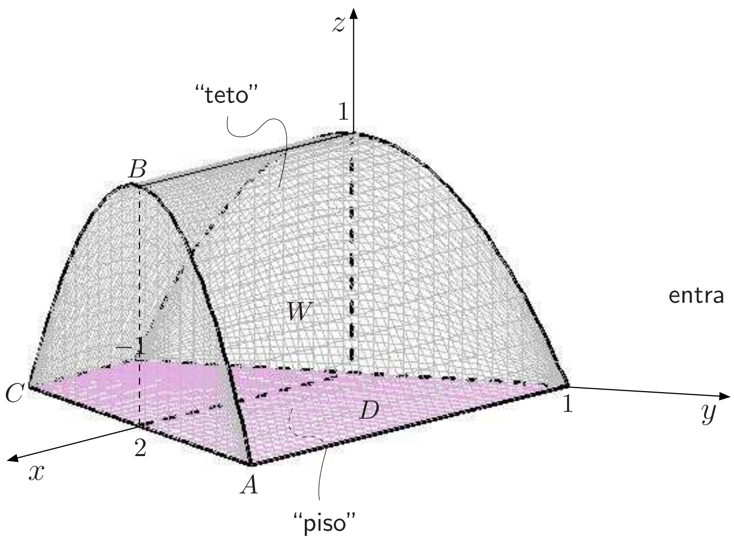
$$= 4\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\,dx = 4\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 4\cdot 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{128}{3}\ \textit{u.v.}$$

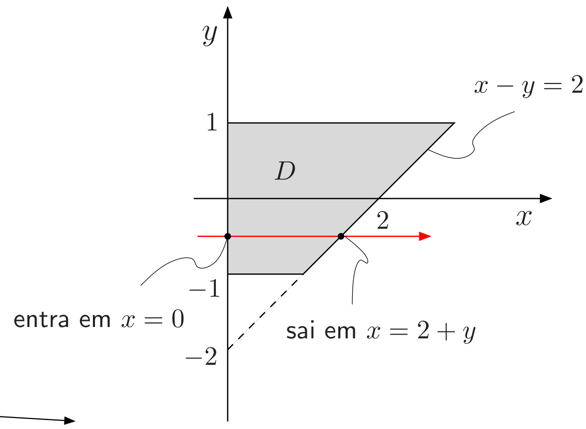
Exercício 8: Encontre o volume do sólido W limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, $x = 0$, $z = 0$ e $x - y = 2$.

Solução:

Esboço do sólido W

Inicialmente traçamos, no plano yz, a parábola $z = 1 - y^2$, com $z \geq 0$. Como esta equação é independente da variável x, traçamos, por pontos desta parábola, retas paralelas ao eixo x, obtendo assim o cilindro parabólico. Para esboçar o plano $x - y = 2$, traçamos primeiramente no plano xy a reta $x - y = 2$. Como esta equação não depende da variável z, traçamos por pontos desta reta, retas paralelas ao eixo z. Vemos que os pontos $A = (3, 1, 0)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (1, -1, 0)$ são comuns às duas superfícies. Ao ligarmos tais pontos, obtemos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelos planos $x = 0$ e $z = 0$, temos o sólido W representado na figura que se segue.





Observemos que o "teto" do sólido W é a superfície $z = 1 - y^2$ e que o "piso" de W é o trapézio D, que deve ser olhado como uma região do tipo II. Vemos que a projeção de D no eixo y é o intervalo $[-1, 1]$. Logo, $-1 \leq y \leq 1$. Vemos, também que uma horizontal qualquer através de D entra em D em $x = 0$ e sai de D na reta $x - y = 2$, onde $x = 2 + y$. Logo, $0 \leq x \leq 2 + y$. Assim, D é definido pelas desigualdades $D : \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 + y \end{cases}$. Temos, então,

$$V(W) = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_D \left(1 - y^2\right)\, dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2+y} \left(1 - y^2\right)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(1 - y^2\right)(2 + y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2 + y - 2y^2 - y^3\right)\, dy = \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3} \text{ u.v.}$$