Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 2

Aula 3 – Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Objetivo

- Aprender a fazer mudança de variáveis em integrais duplas.

No Cálculo II, você aprendeu a fórmula da mudança de variável para uma função de uma variável:

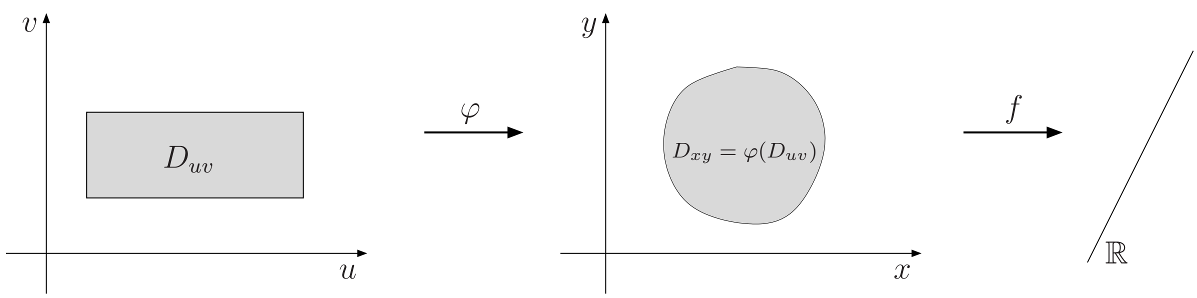
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left(g(u)\right) g'(u)\,du\,.$$

Para as integrais duplas, temos uma fórmula análoga.

Uma mudança de variáveis em um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é dada por uma transformação

$$\begin{array}{rcll} \varphi: & D_{uv}\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y)=\varphi(u,v)=\big(x(u,v),\,y(u,v)\big) \end{array}$$

de classe C^1 e injetora no interior de D_{uv}.



Suponhamos que o jacobiano de φ, $J\varphi(u,v)$ seja diferente de 0, isto é,

$$J = J\varphi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Prova-se que $dxdy = |J|\,dudv$.

Seja $D_{xy} = \varphi\left(D_{uv}\right)$. Então, se $f(x,y)$ é contínua em D_{xy}, temos:

$$\iint_{Dxy} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\,|J|\,dudv\,.$$

OBS.: Pelo teorema da função inversa, o jacobiano de φ^{-1} é dado por

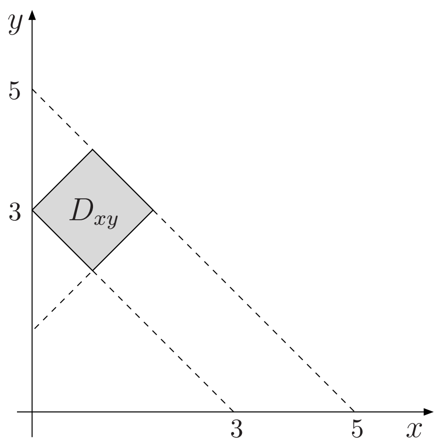
$$J\varphi^{-1}(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \big(J\varphi(u,v)\big)^{-1} = \frac{1}{J\left(\varphi(u,v)\right)}\,.$$

Exemplo 1

Calcule, utilizando uma mudança de variáveis conveniente, a integral $\displaystyle\iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x}\,dxdy$, sendo D_{xy} a região limitada pelas retas $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$.

Solução:

O esboço de D_{xy} é:



Façamos $u=x+y$, $v=y-x$, que nos dá

$$\begin{cases} u+v=2y \\ u-v=2x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\frac{u-v}{2} \\ y=\frac{u+v}{2} \end{cases}$$

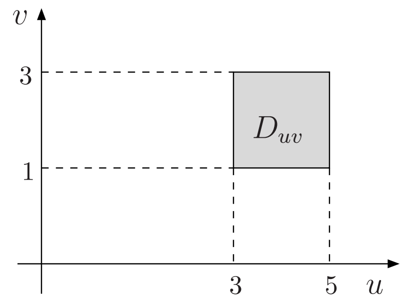
Temos,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

Como $dxdy = |J|\;dudv$, temos $dxdy = \frac{1}{2}\,dudv$.

A seguir, vamos determinar D_{uv}.

Como D_{xy} é limitado por $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$, a região D_{uv} é limitada por $u=3$, $u=5$, $v=1$ e $v=3$.



Segue da fórmula da mudança de variáveis que

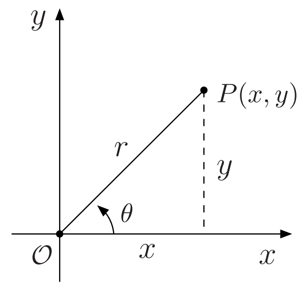
$$\begin{aligned}
\iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x}\,dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v}\cdot\frac{1}{2}\,dudv &= \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v}\,dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_3^5 u^6 \int_1^3 \frac{1}{v}\,dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_3^5 u^6 \Big[\ln v\Big]_1^3\,du \\
&= \frac{\ln 3}{2}\int_3^5 u^6\,du \\
&= \frac{\ln 3}{2}\left[\frac{u^7}{7}\right]_3^5 \\
&= (5^7-3^7)\frac{\ln 3}{14}\,.
\end{aligned}$$

Aula 4 – Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Objetivo

- Estudar uma mudança de variáveis bastante usada: coordenadas polares.

No Cálculo II, você aprendeu coordenadas polares (r,θ), onde r é a distância de um ponto $P=(x,y)$ à origem e θ o ângulo (em radianos) formado pelo eixo x positivo e pelo raio polar $\mathcal{O}P$.



Da figura, vemos que $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ portanto $x^2 + y^2 = r^2$.

Então, consideremos a mudança de variáveis dada por

$$\varphi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

O jacobiano de φ é dado por

$$J = J\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r\,.$$

Então,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{r\theta}} f\,(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\;\;drd\theta\,.$$

OBS.:

1. O termo $dxdy$ não é substituído por $drd\theta$, mas por $rdrd\theta$.
2. A área de D, em coordenadas polares, é dada por

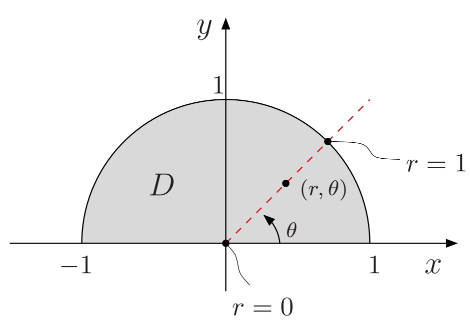
$$A(D) = \iint\limits_{D_{r\theta}} r\,drd\theta\,.$$

Exemplo 1

Calcule $\displaystyle\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}\,dxdy$, onde D é a região limitada pela curva $y = \sqrt{1-x^2}$ e pelo eixo x.

Solução:

O esboço de D é:



Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}$$

Observemos que em D o ângulo θ varia de 0 (no eixo polar $=$ eixo x positivo) a π (no ponto $(-1,0)$). Fixado θ, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, o raio polar r varia de 0 a 1. Então, $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} .$$

Logo,

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} e^{r^2} r\,drd\theta = \int_0^1 \int_0^\pi e^{r^2} r\,d\theta dr = \pi \int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,.$$

Temos $d(r^2) = 2r\,dr$, portanto $r\,dr = \frac{1}{2}d(r^2)$. Então,

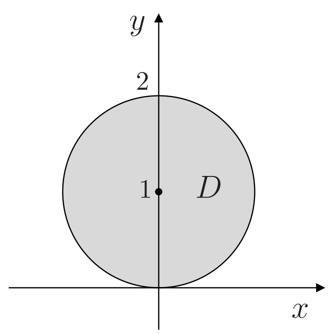
$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 e^{r^2}\,d(r^2) = \tfrac{\pi}{2}\left[e^{r^2}\right]_0^1 = \tfrac{\pi}{2}(e-1)\,.$$

Exemplo 2

Calcule $I = \iint_D y\,dxdy$, onde D é limitado por $x^2+y^2 = 2y$.

Solução:

Completando o quadrado em $x^2+y^2 = 2y$, temos $x^2+(y-1)^2 = 1$. Logo, temos uma circunferência de centro $(0,1)$ e raio 1. Assim, o esboço de D é:



Calcular I, enquadrando D como tipo I ou tipo II, é uma tarefa difícil (verifique), então passemos para coordenadas polares. Temos,

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}$$

Passando $x^2+y^2=2y$ para coordenadas polares, temos $r^2=2r\operatorname{sen}\theta$ ou $r=2\operatorname{sen}\theta$. Observemos que, como o eixo x é tangente à circunferência na origem, θ varia de 0 a π. Fixando θ, tal que $0\leq\theta\leq\pi$, o raio polar r varia de 0 a $2\operatorname{sen}\theta$. Logo, o conjunto $D_{r\theta}$ é dado por

$$D_{r\theta}:\begin{cases}0\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq r\leq 2\operatorname{sen}\theta\end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}I &= \iint_{D_{r\theta}} r\operatorname{sen}\theta\cdot r\,drd\theta\\ &= \iint_{D_{r\theta}} r^2\operatorname{sen}\theta\,drd\theta\\ &= \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\,drd\theta\\ &= \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\left[\tfrac{r^3}{3}\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta}d\theta\\ &= \tfrac{8}{3}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Vale a pena lembrar que

$$\begin{cases}\operatorname{sen}^4\theta=\left(\operatorname{sen}^2\theta\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)\\ \displaystyle\int\cos^2 u\,du=\frac{1}{2}\left(u+\frac{\operatorname{sen}2u}{2}\right)+C\end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}I &= \tfrac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)\,d\theta\\ &= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)\,d(2\theta)\\ &= \tfrac{1}{3}\left[2\theta-2\operatorname{sen}2\theta+\tfrac{1}{2}\left(2\theta+\tfrac{\operatorname{sen}4\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi}\\ &= \tfrac{1}{3}\left[3\theta-2\operatorname{sen}2\theta+\tfrac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]_0^{\pi}\\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dA$, onde D é a região compreendida pelas retas $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$ e $x+y=3$.

Exercício 2: Use a transformação $u=\dfrac{y}{x}$ e $v=xy$ para determinar $\displaystyle\iint_D xy^3\,dA$ na região D do primeiro quadrante, limitada por $y=x$, $y=3x$, $xy=1$ e $xy=4$.

Exercício 3: Calcule a integral dupla $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dA$, onde D é a região contida na circunferência $x^2+y^2=1$.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, onde D é o disco centrado fora da origem, dado pela desigualdade $x^2+y^2 \leq 2y$ ou $x^2+(y-1)^2 \leq 1$.

Exercício 5: Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante fora da circunferência $r=2$ e dentro do cardioide $r=2(1+\cos\theta)$.

Exercício 6: Calcule as integrais, transformando-as em coordenadas polares.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dydx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{x}^{\sqrt{18-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2+1)\, dydx$

Exercício 7: Determine o volume do sólido W, limitado pelo paraboloide $z=4-x^2-y^2$ e pelo plano xy.

Exercício 8: Determine o volume do sólido W no interior da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e do cilindro $x^2+(y-1)^2=1$ e acima do plano $z=0$.