Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 2 – Tutor

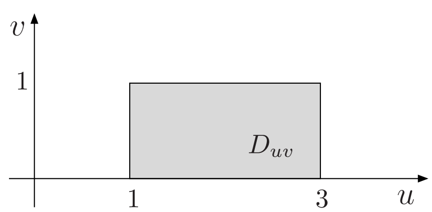
Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{x+y}\, dA$ onde D é a região compreendida pelas retas $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$ e $x+y=3$.

Solução: Calcular diretamente essa integral seria penoso pela complexidade da região de integração. Mas a ocorrência das expressões $x-y$ e $x+y$ no integrando e também nas equações da fronteira sugere a seguinte transformação: $u=x+y$ e $v=x-y$ donde $x=\dfrac{u+v}{2}$ e $y=\dfrac{u-v}{2}$.

O jacobiano J é dado por

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\,.$$

Com essa transformação a fronteira de D_{uv} é formada pelas retas $v=0$, $v=1$, $u=1$ e $u=3$



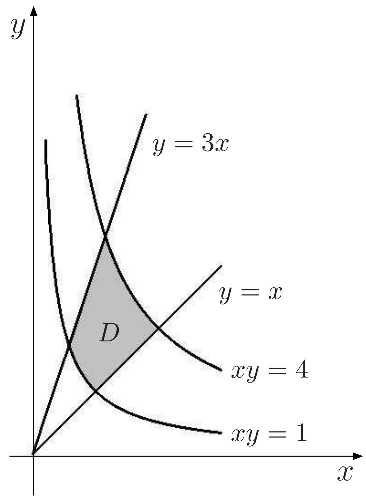
Assim, pela fórmula da mudança de variáveis temos:

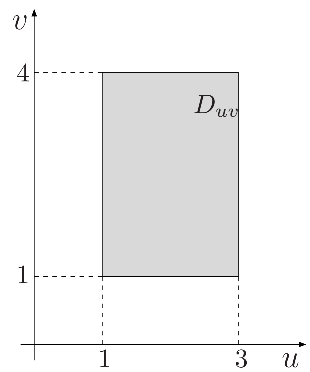
$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\, dA=\iint_{D_{uv}} \frac{v}{u}|J|\; dudv=\iint_{D_{uv}} \frac{v}{u}\left|\frac{-1}{2}\right| dudv=\frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 \frac{v}{u}\; dudv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v\big[\ln u\big]_1^3\; dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v(\ln 3-\ln 1)\; dv=\frac{1}{2}\ln 3\int_0^1 v\; dv=\frac{1}{4}\ln 3\,.$$

Exercício 2: Use a transformação $u=\dfrac{y}{x}$ e $v=xy$ para determinar $\displaystyle\iint_D xy^3\; dA$ na região D do primeiro quadrante, limitada por $y=x$, $y=3x$, $xy=1$ e $xy=4$.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.





Com essa transformação, a região D transforma-se na região D_{uv} limitada pelas retas $u = 1$, $u = 3$, $v = 1$ e $v = 4$. Temos:

$$J^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\frac{2y}{x} = -2u\,.$$

Logo,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{J^{-1}} = \frac{1}{-2u} = -\frac{1}{2u}\,.$$

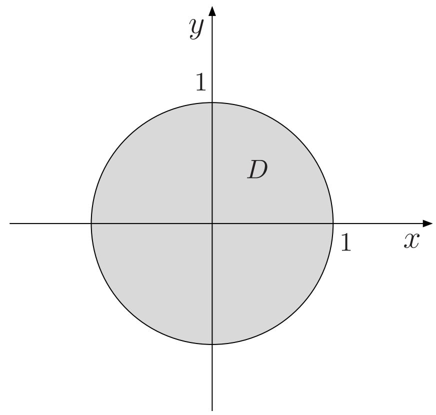
De $u = y/x$ e $v = xy$ temos $uv = y^2$. Portanto, o integrando $xy^3 = xy \cdot y^2$ transforma-se em $v \cdot uv = uv^2$. Assim, da fórmula da mudança de variáveis temos:

$$\iint_D xy^3\ dA = \iint_{D_{uv}} uv^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \iint_{D_{uv}} uv^2 \left|-\frac{1}{2u}\right| dudv = \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} v^2\ dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \int_1^4 v^2\ dvdu = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{v^3}{3}\right]_1^4 du = \frac{1}{6}(64-1)\int_1^3 du = \frac{63}{3}\left[u\right]_1^3 = \frac{21}{2}(3-1) = 21\,.$$

Exercício 3: Calcule a integral dupla $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ onde D é a região contida na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas polares, vemos que $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r\ drd\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares

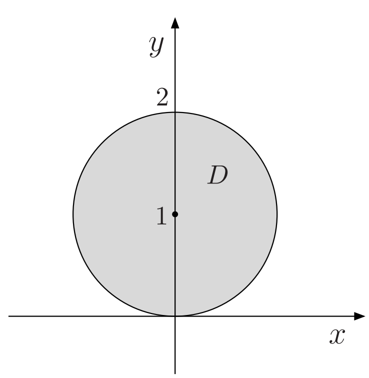
Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo vemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A equação $x^2 + y^2 = 1$ transforma-se em $r^2 = 1$ ou $r = 1$. Assim, para θ fixo, fazemos r crescer de $r = 0$ a $r = 1$. Logo $D_{r\theta}$ é dado pelas desigualdades $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$. Portanto:

$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} dA = \iint\limits_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r\ drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} r\ drd\theta =$$

$$= \frac{1}{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} (-2r)\ drd\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-r^2} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{2} \left(e^{-1} - 1 \right) \int_0^{2\pi} d\theta = \left(1 - e^{-1} \right) \pi\,.$$

Exercício 4: Calcule $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ onde D é o disco centrado fora da origem, dado pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq 2y$ ou $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

Solução: O esboço de D está representado na figura que se segue.



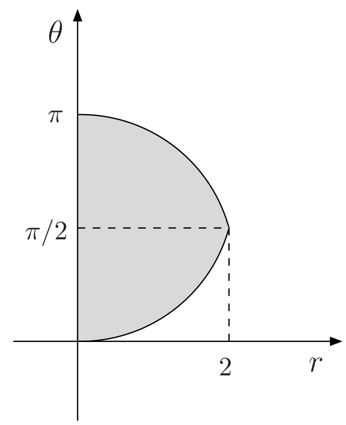
Passando para coordenadas polares temos:

$$\begin{cases} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy & = & r\ drd\theta \\ x^2 + y^2 & = & r^2 \end{cases}.$$

O integrando $\sqrt[3]{x^2+y^2}$ transforma-se em $\sqrt[3]{r^2} = r^{2/3}$.

Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo vemos que θ varia de 0 a π. A equação da circunferência $x^2+y^2=2y$ transforma-se, em coordenadas polares, em $r^2 = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta$ donde $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ é a equação polar da circunferência. Assim, para θ fixo, fazemos r crescer de $r=0$ a $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. Logo, $D_{r\theta}$ é dado por $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.



Então,

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2}\; r\; drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2\; drd\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^2\; drd\theta =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^\pi \mathrm{sen}^3\,\theta\; d\theta\,.$$

Mas:

$$\mathrm{sen}^3\,\theta = \mathrm{sen}^2\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Fazendo $u = \cos\theta$ temos $du = -\,\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta$. Para $\theta = 0$ temos $u = 1$ e para $\theta = \pi$ temos $u = -1$. Então,

$$I = \frac{8}{3}\int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta = \frac{8}{3}\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)(-du) = \frac{-8}{3}\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)du =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-1}^1 (1-u^2)du = \frac{8}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{8}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9}\,.$$

OBS.: Você notou que um disco centrado na origem transforma-se em um retângulo no plano $r\theta$ e que um disco centrado fora da origem não se transforma em um retângulo no plano $r\theta$?

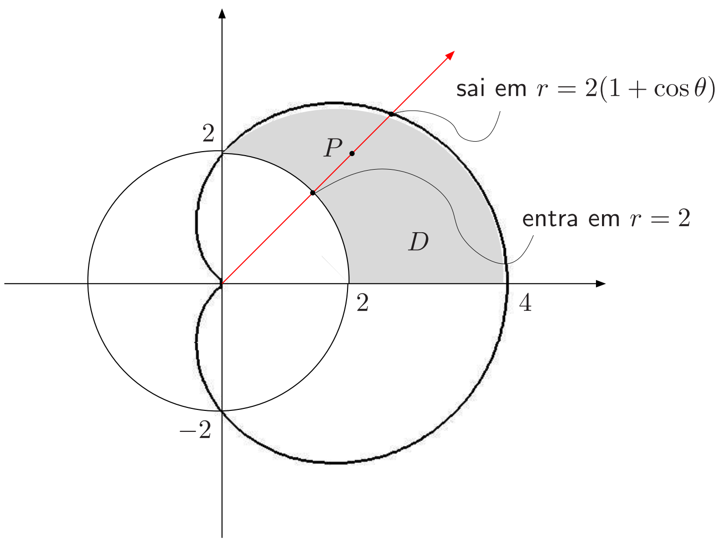
Exercício 5: Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$ onde D é a região no primeiro quadrante fora da circunferência $r=2$ e dentro do cardioide $r = 2(1+\cos\theta)$.

Solução: Passando para coordenadas polares temos $y = r \operatorname{sen}\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r\ drd\theta$.

Esboço de D

Seja $r = 2(1+\cos\theta)$. Para $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$ e $\theta = 2\pi$ temos, respectivamente, $r = 4$, $r = 2$, $r = 0$ e $r = 2$.

De $r^2 = 4$ temos $x^2 + y^2 = 4$. Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo (onde $\theta = 0$) até o eixo y positivo (onde $\theta = \pi/2$), vemos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Considerando um ponto P no interior de D, vemos que a semirreta $\mathcal{O}P$ entra em D em $r = 2$ e sai de D em $r = 2(1+\cos\theta)$. Então, temos $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 2 \leq r \leq 2(1+\cos\theta) \end{cases}$. Assim:

$$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA = \iint\limits_{D_{r\theta}} \frac{r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2}}\, r\ drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r\ \operatorname{sen}\theta\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\ drd\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \left[4(1+\cos\theta)^2 - 4\right] = \frac{1}{2}\cdot 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 1\right)\operatorname{sen}\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{2}{-1}\int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta + \cos^2\theta\right)(-\operatorname{sen}\theta)\ d\theta = -2\left[\frac{2\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -2\left[0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{8}{3}.$$

Exercício 6: Calcule as integrais, transformando-as em coordenadas polares.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dydx$ b) $\displaystyle\int_0^3\int_x^{\sqrt{18-x^2}} \operatorname{sen}\left(x^2+y^2+1\right) dydx$

Solução:

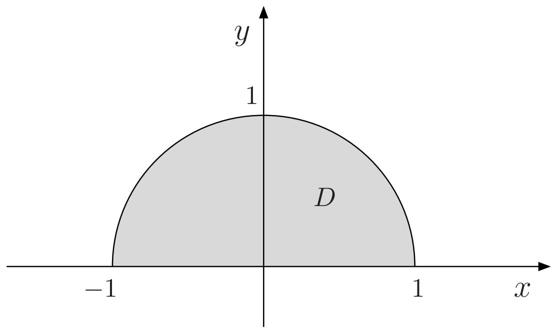
a) Temos:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\ dydx = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dxdy,$$

onde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}\ .$$

Logo, D está entre as retas $x = -1$ e $x = 1$ e está limitada inferiormente pela reta $y = 0$ e superiormente pela curva $y = \sqrt{1-x^2}$ $\big($ou $x^2+y^2 = 1\big)$, com $y \geq 0$. Assim, o esboço da região D está representado na figura que se segue.



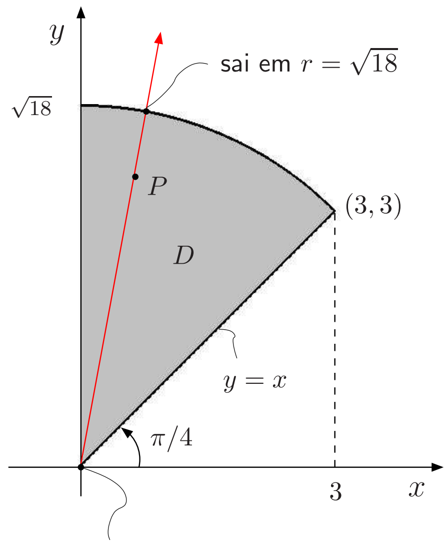
Passando para coordenadas polares, temos $x^2+y^2 = r^2$ e $dA = rdrd\theta$ e $D_{r\theta}$ é dado pelas desigualdades $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$. Então,

$$I = \iint\limits_{D_{r\theta}} \left(r^2\right)^{3/2} r\ drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^4\ drd\theta = \int_0^1 r^4 \int_0^{\pi} d\theta dr = \pi \int_0^1 r^4\ dr = \pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}\,.$$

b) Temos,

$$I = \int_0^3 \int_x^{\sqrt{18-x^2}} \operatorname{sen}\left(x^2+y^2+1\right) dydx = \iint\limits_D \operatorname{sen}\left(x^2+y^2+1\right) dxdy$$

onde $D : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 3\, ,\, x \leq y \leq \sqrt{18-x^2}\right\}$. Logo, D está entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 3$ e está limitada inferiormente pela reta $y = x$ e superiormente pela curva $y = \sqrt{18-x^2}$ ou $x^2+y^2 = 18$, com $y \geq 0$. De $y = x$ e $x^2+y^2 = 18$, com $y \geq 0$ temos $x^2 = 9$. Como $x \geq 0$, temos $x = 3$ donde $y = 3$. Logo, o ponto de interseção é o ponto $(3,3)$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrição de D em coordenadas polares

Efetuando uma "varredura" em D no sentido anti-horário a partir da reta $y = x$ (onde $\theta = \pi/4$) até o eixo y positivo (onde $\theta = \pi/2$) vemos que θ varia de $\pi/4$ a $\pi/2$. Considerando um ponto P no interior de D vemos que a semirreta OP entra em D em $r = 0$ e sai de D em $r = \sqrt{18}$. Então temos $D_{r\theta}: \begin{cases} \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{18} \end{cases}$. Então,

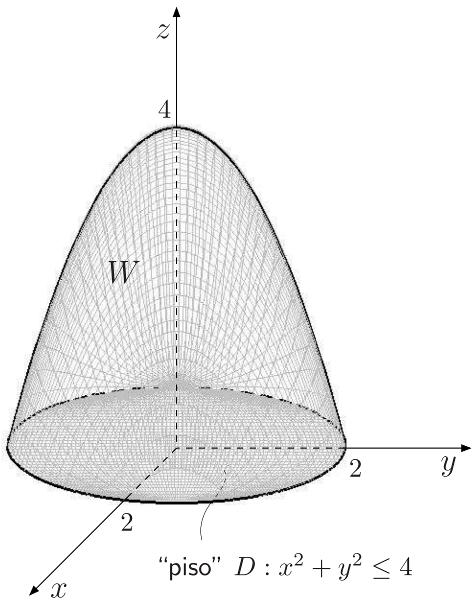
$$I = \iint\limits_{D_{r\theta}} \operatorname{sen}\left(r^2+1\right) r \, dr d\theta = \int_0^{\sqrt{18}} \operatorname{sen}\left(r^2+1\right) r \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{18}} \operatorname{sen}\left(r^2+1\right) r \, dr \, .$$

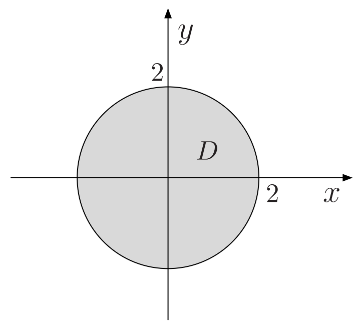
Fazendo $u = r^2 + 1$ temos $du = 2r\,dr$ donde $r\,dr = -du/2$. Para $r = 0$ temos $u = 1$ e para $r = \sqrt{18}$ temos $u = 19$. Então,

$$I = \frac{\pi}{4} \int_1^{19} \operatorname{sen} u \left(\frac{du}{2}\right) = \frac{\pi}{8} \Big[-\cos u \Big]_1^{19} = \frac{\pi}{8} (\cos 1 - \cos 19) \, .$$

Exercício 7: Determine o volume do sólido W, limitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.





Temos:

$$V(W) = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r \operatorname{sen}\theta \\ dxdy & = & r\ drd\theta \\ x^2+y^2 & = & r^2 \end{cases}$$

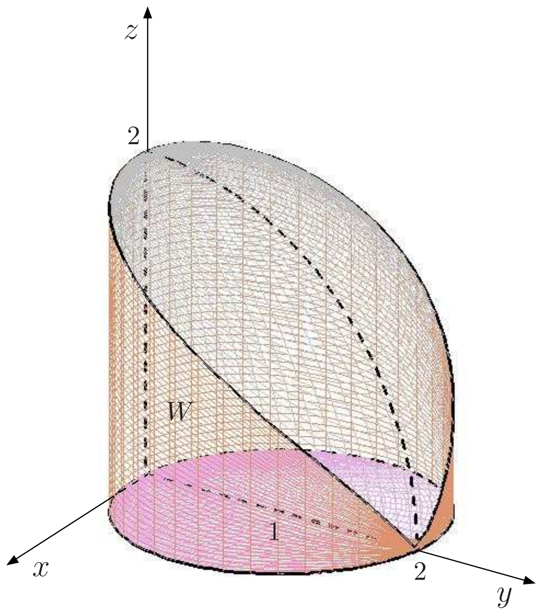
e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$. Então,

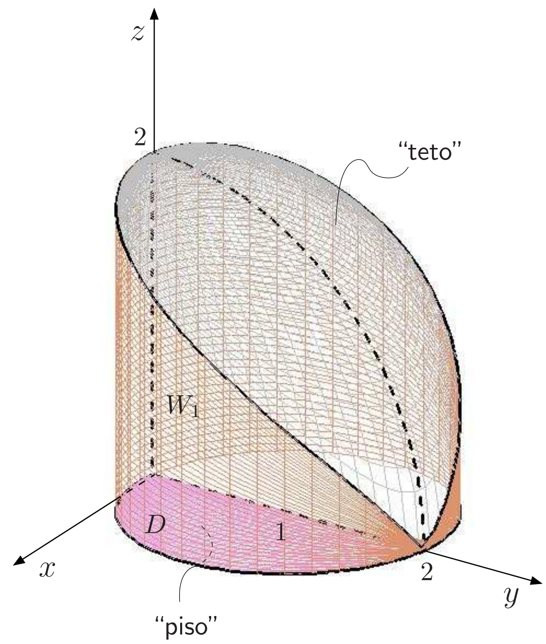
$$V(W) = \iint_{D_{r\theta}} \left(4 - r^2\right)\ r\ drd\theta = \int_0^2 \left(4r - r^3\right) \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr =$$

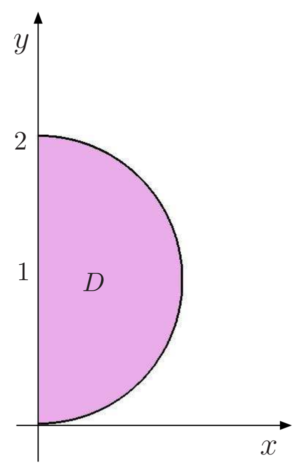
$$= 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi \ \textit{u.v.}$$

Exercício 8: Determine o volume do sólido W no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e do cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e acima do plano $z = 0$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.







Por simetria, temos que $V(W) = 2V(W_1)$ onde

$$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\,,\ x \geq 0 \ \text{ e } \ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}\,.$$

Vemos, também, que o "teto" de W_1 é a superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = f(x, y)$ e que o "piso" é o semidisco $D : x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, com $x \geq 0$. Logo:

$$V(W) = 2V(W_1) = 2 \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = 2 \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $dxdy = r\,drd\theta$. A equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 = 2y$ transforma-se em $r^2 = 2r \operatorname{sen}\theta$ ou $r(r - 2\operatorname{sen}\theta) = 0$ portanto $r = 0$ ou $r = 2\operatorname{sen}\theta$.

Então, o semidisco D em coordenadas polares é $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned}
V(W) &= 2 \iint\limits_{D_{r\theta}} \left(4 - r^2\right)^{1/2} r\, dr d\theta = \\
&= \frac{2}{-2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \left(4 - r^2\right)^{1/2} (-2r)\, dr d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left[\left(4 - r^2\right)^{3/2}\right]_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = \\
&= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \left[\left(4 - 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)^{3/2} - 4^{3/2}\right] d\theta = \\
&= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \left[\left(4\cos^2\theta\right)^{3/2} - 8\right] d\theta = \\
&= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\theta\right)^{3/2} d\theta + \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta\,.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi/2$, temos $\cos\theta \geq 0$, portanto $\left(4\cos^2\theta\right)^{3/2} = (2\cos\theta)^3 = 8\cos^3\theta$. Então,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\theta\right)^{3/2} d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \\
&= 8 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta\right) d(\mathrm{sen}\,\theta) = 8 \left[\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \\
&= 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$V(W) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8}{9}(3\pi - 4)\ \textit{u.v.}$$