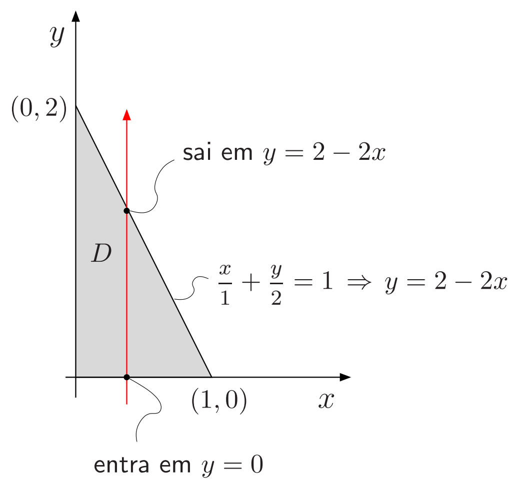
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 3 – Tutor

Exercício 1: Calcule a massa total M, o centro da massa $(\overline{x}, \overline{y})$ de uma lâmina triangular, com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$ se a função densidade é $\delta(x,y) = 1 + 3x + y$.

Solução: O esboço da lâmina D está representado na figura que se segue.



Descrição de D como tipo I:

Temos que $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 - 2x \end{cases}$. A massa da lâmina é dada por:

$$M = \iint\limits_D \delta(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dydx = \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2 - 2x + 3x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 (2-2x) \left(1 + 3x + \frac{2-2x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^1 (1-x)(2 + 6x + 2 - 2x)\, dx = \int_0^1 (1-x)(4+4x) dx = 4 \int_0^1 \left(1 - x^2 \right) dx =$$

$$= 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}\,.$$

O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é tal que

$$M\overline{x} = \iint\limits_D x\, \delta(x,y)\, dA \quad \text{e} \quad M\overline{y} = \iint\limits_D y\, \delta(x,y)\, dA\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_D x\, \delta(x,y)\, dA$:

Temos,

$$\iint\limits_D x\ \delta(x,y)\ dA = \iint\limits_D x(1+3x+y)\ dA = \iint\limits_D \left(x+3x^2+xy\right) dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(x+3x^2+xy\right) dydx = \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + \frac{xy^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x(2-2x) + 3x^2(2-2x) + \frac{x(2-2x)^2}{2}\right] dx = \int_0^1 2(1-x)\left(x+3x^2+\frac{x(2-2x)}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(2x+6x^2+2x-2x^2\right) dx = \int_0^1 (1-x)\left(4x+4x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 4x(1-x)(1+x)\ dx = \int_0^1 4x\left(1-x^2\right) dx = 4\int_0^1 \left(x-x^3\right) dx = 4\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 1\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_D y\ \delta(x,y)\ dA$:

Temos,

$$\iint\limits_D y\ \delta(x,y)\ dA = \iint\limits_D y(1+3x+y)\ dA = \iint\limits_0^1 \int_0^{2-2x} \left(y+3xy+y^2\right) dydx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2-2x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(2-2x)^2}{2} + \frac{3x(2-2x)^2}{2} + \frac{(2-2x)^3}{3}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (2-2x)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{2-2x}{3}\right) dx = \frac{4}{6}\int_0^1 (1-x)^2(3+9x+4-4x)\ dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1-2x+x^2\right)(7+5x)\ dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(7-9x-3x^2+5x^3\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[7x - \frac{9x^2}{2} - x^3 + \frac{5x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(7-\frac{9}{2}-1+\frac{5}{4}\right) = \frac{11}{6}\,.$$

Substituindo acima temos:

$$\frac{8}{3}\,\overline{x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{8}{3}\,\overline{y} = \frac{11}{6}$$

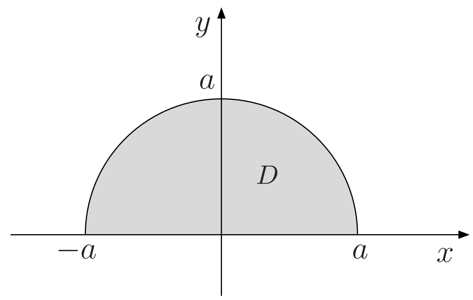
portanto

$$\overline{x} = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{11}{16}\,.$$

Logo, o centro de massa é o ponto $(3/8, 11/16)$.

Exercício 2: A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Solução: Vamos considerar a lâmina como a metade superior do disco $x^2 + y^2 \le a^2$.



Então, a distância do ponto (x, y) ao centro do disco (origem) é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, a função densidade é:

$$\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde $k > 0$ é uma constante. A massa da lâmina é:

$$M = \iint_D \delta(x, y)\ dA = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

Passando para coordenadas polares temos $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $dA = r dr d\theta$ e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$.
Então,

$$M = k \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r\ dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2\ dr d\theta = k \int_0^a r^2 \int_0^\pi d\theta dr = k\pi \int_0^a r^2\ dr = k\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{k\pi a^3}{3}\,.$$

O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é tal que

$$M\overline{x} = \iint_D x\ \delta(x, y)\ dA \quad \text{e} \quad M\overline{y} = \iint_D y\ \delta(x, y)\ dA\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_D x\ \delta(x, y)\ dA$:

Temos que

$$\iint_D x\ \delta(x, y)\ dA = k \iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = 0$$

pois a função $x\sqrt{x^2 + y^2}$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y. Assim, $\overline{x} = 0$.

Cálculo de $\displaystyle\iint_D y\ \delta(x, y)\ dA$:

Temos que

$$\iint_D y\ \delta(x,y)\ dA = k\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dA = k\iint_{D_{r\theta}} r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot r\cdot r\ drd\theta =$$

$$= k\int_0^a r^3\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta\ d\theta dr = k\int_0^a r^3\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi dr = 2k\int_0^a r^3\ dr = 2k\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{ka^4}{2}\,.$$

Assim

$$\frac{k\pi a^3}{3}\ \overline{y} = \frac{ka^4}{2}$$

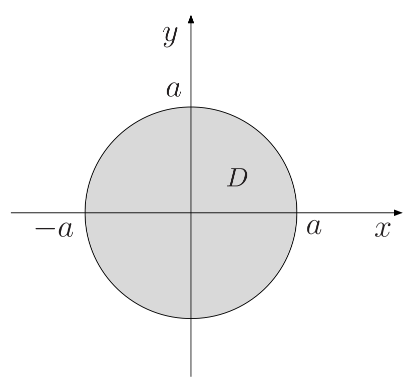
logo

$$\overline{y} = \frac{3a}{2\pi}\,.$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto $(0, 3a/2\pi)$.

Exercício 3: Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D, com densidade $\delta(x,y)=\delta$, centro na origem e raio a.

Solução: O esboço da região D está representado na figura que se segue.



O momento de inércia I_x é dado por:

$$I_x = \iint_D y^2\ \delta(x,y)\ dA = \delta\iint_D y^2\ dA\,.$$

Temos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $dA = rdrd\theta$ e $D_{r\theta}: \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$. Então,

$$I_x = \delta\iint_{D_{r\theta}} r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cdot r\ drd\theta = \delta\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\int_0^a r^3\ drd\theta = \delta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{\delta a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\delta\pi a^4}{4}\,.$$

O momento de inércia I_y é dado por:

$$I_y = \iint_D x^2\ \delta(x,y)\ dA = \delta\iint_D x^2\ dA = \delta\iint_{D_{r\theta}} r^2\cos^2\theta\cdot r\ drd\theta =$$

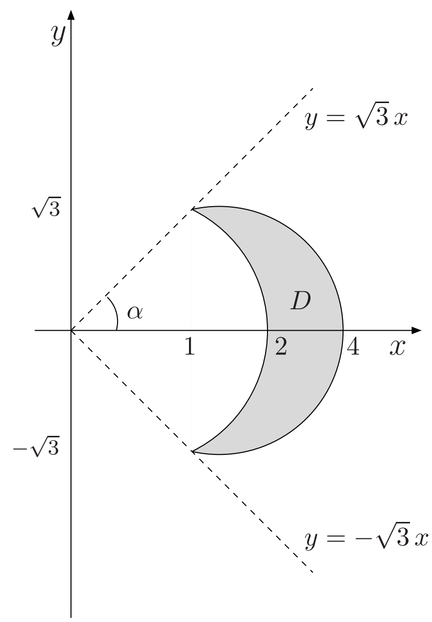
$$= \delta\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\int_0^a r^3\ drd\theta = \frac{\delta a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\delta\pi a^4}{4}\,.$$

Como $I_0 = I_x + I_y$ então:

$$I_0 = \frac{\delta\pi a^4}{2} \,.$$

Exercício 4: Uma lâmina delgada tem a forma da região D, que é interior à circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 4$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Calcule a massa da lâmina se a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$.

Solução: De $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ou $x^2+y^2 = 4x$ e $x^2+y^2 = 4$ temos $4x = 4$ portanto $x = 1$. Logo, $(1, -\sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$ são as interseções. Assim, o esboço da lâmina D está representado na figura que se segue.



$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \pi/3$

A massa da lâmina D é dada por:

$$M = \iint_D \delta(x,y)\, dA = \iint_D \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} dA \,.$$

Passando para coordenadas polares temos $x^2+y^2 = r^2$ e $dA = r\, dr d\theta$.

Descrição de D em coordenadas polares:

Efetuando uma "varredura" em D, no sentido anti-horário, a partir da reta $y = -\sqrt{3}\,x$, onde $\theta = -\pi/3$ até a reta $y = \sqrt{3}\,x$, onde $\theta = \pi/3$, vemos que θ varia de $-\pi/3$ até $\pi/3$. Transformando as equações das circunferências para coordenadas polares temos,

$$x^2+y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 \qquad\qquad \Rightarrow \quad r = 2$$

$$x^2+y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4r\cos\theta \quad \overset{r\neq 0}{\Rightarrow} \quad r = 4\cos\theta$$

Então $2 \leq r \leq 4\cos\theta$, isto é, $D_{r\theta}$ é dado por $D_{r\theta} : \begin{cases} -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3 \\ 2 \leq r \leq 4\cos\theta \end{cases}$. Assim,

$$M = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{2}^{4\cos\theta} \left(r^2\right)^{-1/2} r \, dr d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{2}^{4\cos\theta} \frac{1}{r} \cdot r \, dr d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4\cos\theta - 2) \, d\theta = \Big[4 \operatorname{sen}\theta - 2\theta \Big]_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

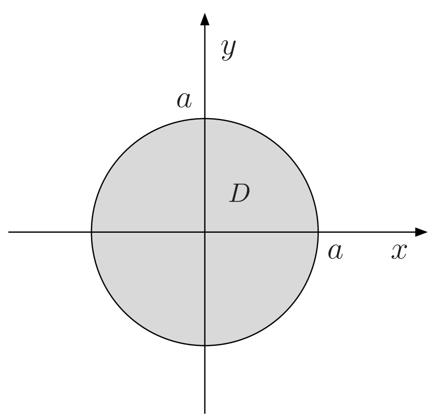
$$= \left(4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) - \left(4 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) - \left(\frac{-4\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) \textit{ u.m.}$$

Exercício 5: Uma placa fina está limitada pela circunferência $x^2+y^2 = a^2$ e tem densidade $\delta(x,y) = \frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}$. Mostre que o seu momento de inércia polar é dado por: $I_0 = Ma^2\left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$, onde M é a sua massa.

Solução: O esboço da placa D está representado na figura que se segue.



A massa M da placa é dada por:

$$M = \iint_D \delta(x,y) \, dA = \iint_D \frac{a^2}{a^2+x^2+y^2} \, dA \, .$$

Passando para coordenadas polares teremos $x^2+y^2 = r^2$, $dA = r \, dr d\theta$ e $D_{r\theta}$, que é a descrição de

D nessas coordenadas é $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \end{cases}$. Então,

$$M = \iint_{D_{r\theta}} \frac{a^2}{a^2+r^2}\, r\, drd\theta = a^2 \int_0^a \frac{r}{a^2+r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= \frac{2\pi a^2}{2} \int_0^a \frac{2r}{a^2+r^2}\, dr = \pi a^2 \left[\ln\left(a^2+r^2\right)\right]_0^a =$$

$$= \pi a^2 \left(\ln\left(a^2+a^2\right) - \ln a^2\right) = \pi a^2 \left(\ln\left(2a^2\right) - \ln a^2\right) =$$

$$= \pi a^2 \left(\ln 2 + \ln a^2 - \ln a^2\right) = \pi a^2 \ln 2 \text{ u.m.}$$

O momento de inércia polar é dado por:

$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right) \delta(x,y)\, dA = a^2 \iint_D \frac{x^2+y^2}{a^2+x^2+y^2}\, dA =$$

$$= a^2 \iint_D \frac{a^2+x^2+y^2-a^2}{a^2+x^2+y^2}\, dA =$$

$$= a^2 \iint_D \left(\frac{a^2+x^2+y^2}{a^2+x^2+y^2} - \frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}\right) dA =$$

$$= a^2 \iint_D \left(1 - \frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}\right) dA =$$

$$= a^2 \left(\iint_D dA - \iint_D \frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}\, dA\right) = a^2 \left(A(D) - M\right) =$$

$$= a^2 \left(\pi a^2 - \pi a^2 \ln 2\right) = \pi a^4 \left(1 - \ln 2\right) =$$

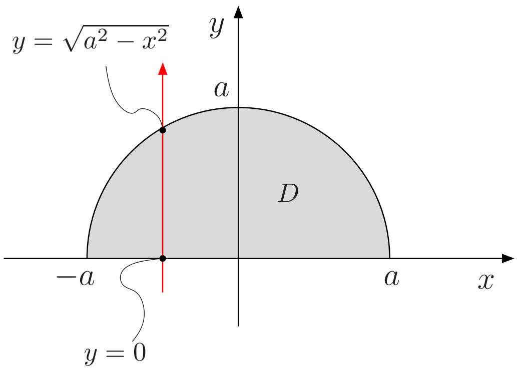
$$= \pi a^4 \ln 2 \left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right) =$$

$$= a^2 \left(\pi a^2 \ln 2\right) \left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right) = Ma^2 \left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$$

como queríamos mostrar.

Exercício 6: Uma lâmina tem a forma semicircular $x^2+y^2 \leq a^2$, com $y \geq 0$. A densidade é diretamente proporcional à distância do eixo x. Ache o momento de inércia em relação ao eixo x.

Solução: O esboço da lâmina D está representado na figura que se segue.



Por hipótese, temos que a densidade em (x, y) é $\delta(x, y) = ky$. O momento de inércia em relação ao eixo x é dado por:

$$I_x = \iint_D y^2\ \delta(x, y)\ dxdy = \iint_D y^2(ky)\ dxdy = k \iint_D y^3\ dxdy$$

onde D, como tipo I, é dado pelas desigualdades $D : \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$. Então,

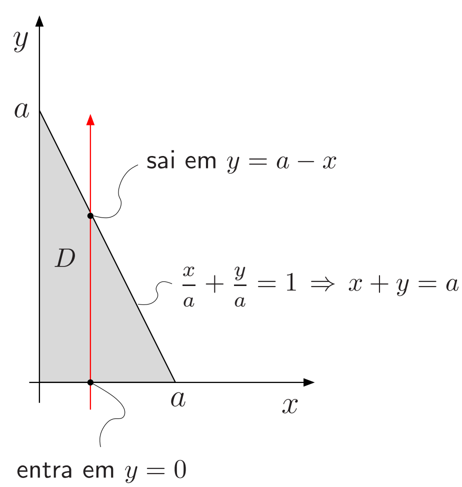
$$I_x = k \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^3\ dydx = k \int_{-a}^{a} \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{k}{4} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{k}{4} \int_{-a}^{a} \left(a^4 - 2a^2x^2 + x^4\right) dx = \frac{k}{4} \left[a^4x - \frac{2a^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-a}^{a} = \frac{2k}{4} \left(a^5 - \frac{2a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{15a^5 - 10a^5 + 3a^5}{15} = \frac{4ka^5}{15}\ .$$

Exercício 7: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, com lados iguais de comprimento a. Ache a massa, se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.

Solução: É conveniente considerar o sistema de eixos coordenados, passando pelos catetos com o vértice na origem.



Por hipótese, a densidade em (x,y) é $\delta(x,y) = k\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = k\left(x^2+y^2\right)$ onde $k > 0$ é uma constante. Como $M = \iint\limits_D \delta(x,y)\,dA$, então $M = k\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dA$, onde D, como tipo I, é dada por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a-x \end{cases}$. Logo,

$$M = k\int_0^a \int_0^{a-x} \left(x^2+y^2\right) dydx = k\int_0^a \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} dx = k\int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right] dx =$$

$$= k\int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3}{3}\right] dx = \frac{k}{3}\int_0^a \left(6ax^2 - 4x^3 + a^3 - 3a^2x\right) dx =$$

$$= \frac{k}{3}\left[2ax^3 - x^4 + a^3x - \frac{3a^2x^2}{2}\right]_0^a = \frac{k}{3}\left(2a^4 - a^4 + a^4 - \frac{3a^4}{2}\right) = \frac{ka^4}{6} \text{ u.m.}$$