Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 4 – Tutor

Exercício 1: Calcule a integral iterada $\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dxdzdy$.

Solução: Temos,

$$\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dxdzdy = \int_0^3\int_0^1 ze^y\sqrt{1-z^2}\,dzdy = \int_0^3 e^y\int_0^1\left(1-z^2\right)^{1/2} z\,dzdy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^3 e^y\int_0^1\left(1-z^2\right)^{1/2}(-2z)\,dzdy = -\frac{1}{2}\int_0^3 e^y\frac{2}{3}\left[\left(1-z^2\right)^{3/2}\right]_0^1 dy =$$

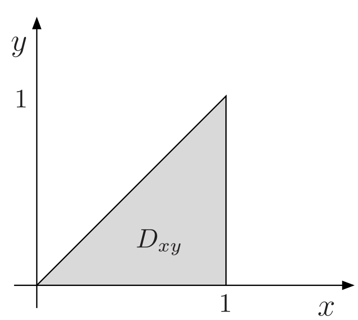
$$= -\frac{1}{3}\int_0^3 e^y(0-1)\,dy = \frac{1}{3}\Big[e^y\Big]_0^3 = \frac{1}{3}\left(e^3-1\right)\ .$$

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint_W e^{x^2}\,dxdydz$, onde W é o conjunto $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$ e $0\le z\le 1$.

Solução: Temos

$$\iiint_W e^{x^2}\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} e^{x^2}\int_0^1 dzdxdy = \iint_{D_{xy}} e^{x^2}dxdy$$

onde $D_{xy}:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$ é a projeção de W sobre o plano xy.



Então,

$$\iiint_W e^{x^2}\,dxdydz = \int_0^1 e^{x^2}\int_0^x dydx = \int_0^1 e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}(2x)\,dx =$$

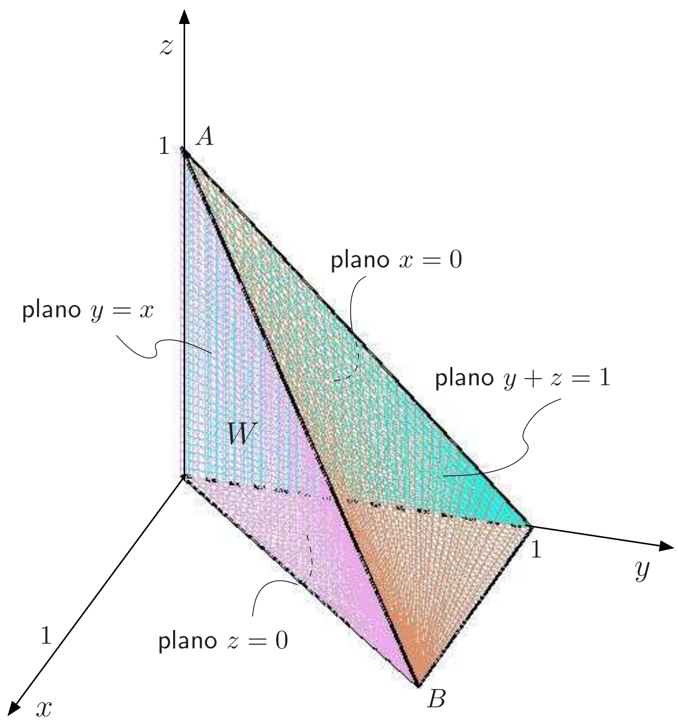
$$= \frac{1}{2}\Big[e^{x^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1)\,.$$

Exercício 3: Escreva as seis integrais triplas iteradas para o volume do sólido W limitado pelos planos $y+z=1$, $y=x$, $x=0$ e $z=0$. Calcule uma das integrais.

Solução:

Esboço do sólido W :

Esboçando os planos $y+z=1$ e $y=x$, vemos que $A=(0,0,1)$ e $B=(1,1,0)$ são comuns aos dois planos. Então, ligando-os temos a reta interseção. Considerando que W é também limitado pelos planos $x=0$ e $z=0$, temos o esboço de W na figura que se segue.

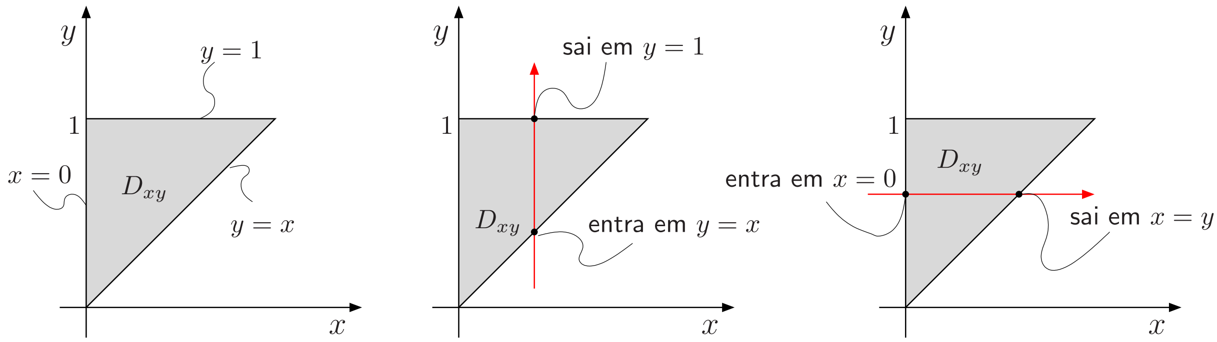


Temos,

$$V(W)=\iiint\limits_W dxdydz\,.$$

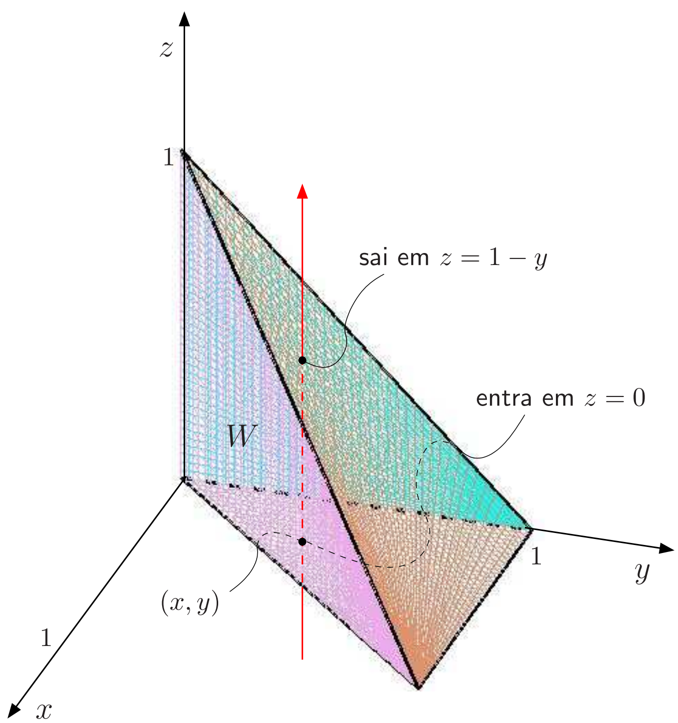
Limites de integração nas ordens $dzdxdy$ *e* $dzdydx$*:*

Projetando o sólido W sobre o plano xy, encontramos o triângulo D_{xy}.



Temos $D_{xy}:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{cases}$ (tipo I) ou $D_{xy}:\begin{cases}0\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ (tipo II).

A reta que passa por $(x,y)\in D_{xy}$ e é paralela ao eixo z entra em W em $z=0$ e sai de W em $z=1-y$. Então, $0\le z\le 1-y$.



Logo,

$$V(W)=\iint_{D_{xy}}\int_0^{1-y} dzdxdy\,.$$

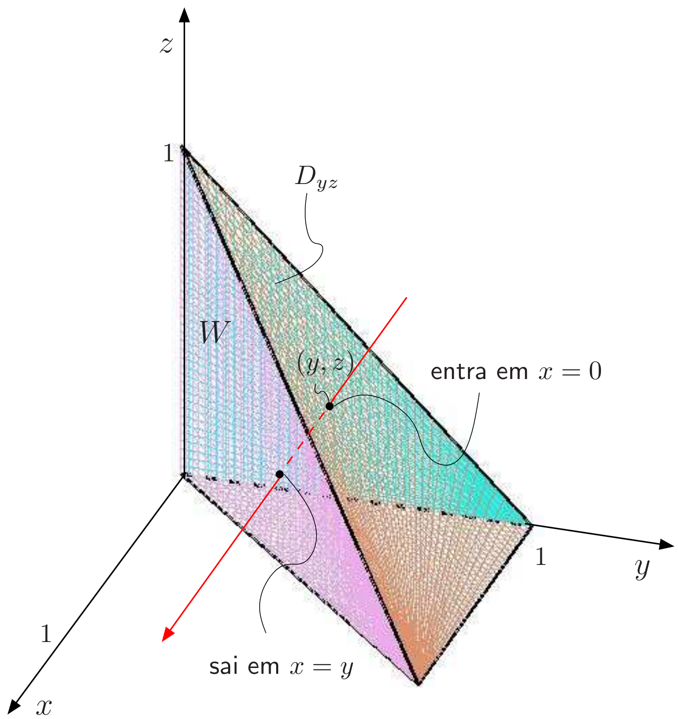
Portanto:

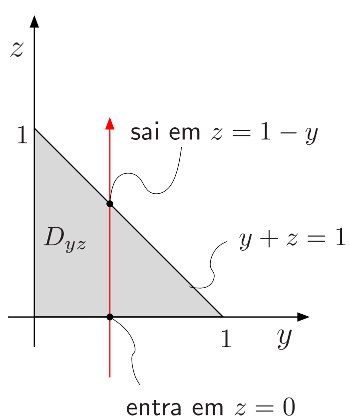
a) $V(W)=\int_0^1\int_x^1\int_0^{1-y} dzdydx$

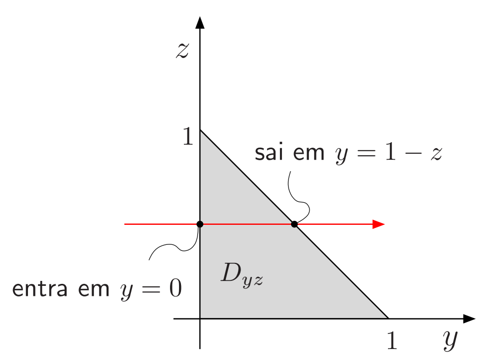
b) $V(W) = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-y} dzdxdy$

Limites de integração nas ordens $dxdydz$ e $dxdzdy$:

Projetando o sólido W sobre o plano yz encontramos o triângulo D_{yz}.







Temos $D_{yz} : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - y \end{cases}$ (tipo I) ou $D_{yz} : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - z \end{cases}$ (tipo II).

A reta que passa por $(y, z) \in D_{yz}$ e é paralela ao eixo x entra em W em $x = 0$ e sai de W em

$x = y$. Então, $0 \leq x \leq y$. Logo,

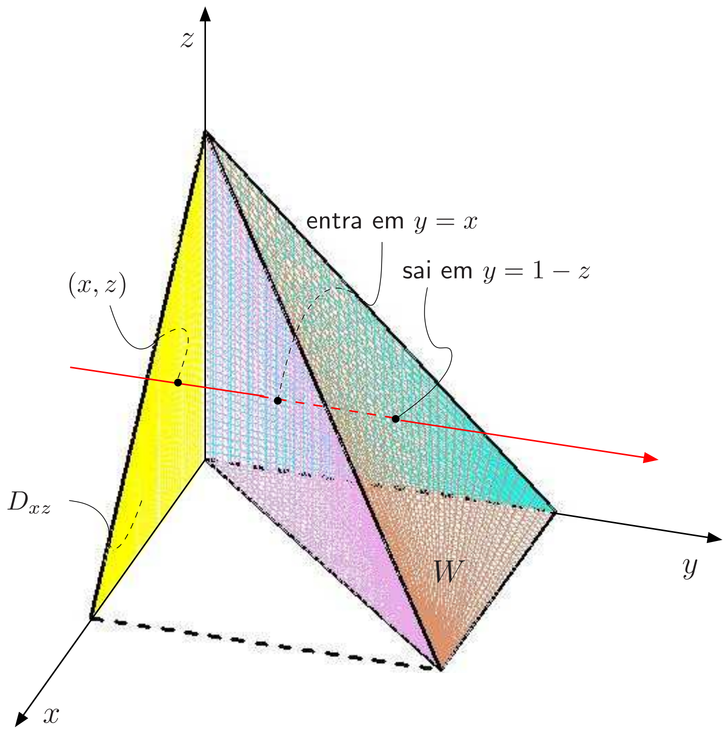
$$V(W) = \iint_{D_{yz}} \int_0^y dxdydz\,.$$

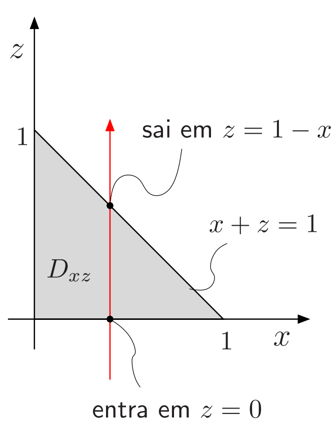
Portanto:

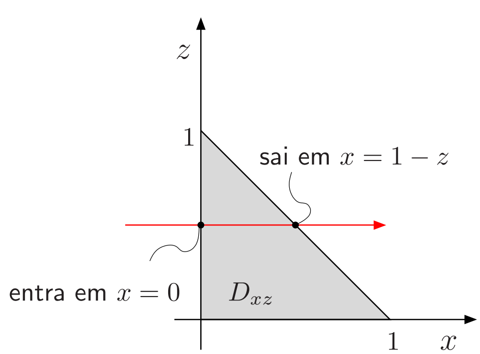
c) $V(W) = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^y dxdzdy$ d) $V(W) = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^y dxdydz$

Limites de integração nas ordens $dydzdx$ e $dydxdz$

Projetando o sólido W sobre o plano xz, temos o triângulo D_{xz}.







Temos $D_{xz} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1-x \end{cases}$ (tipo I) ou $D_{xz} : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-z \end{cases}$ (tipo II).

A reta que passa por $(x, z) \in D_{xz}$ e é paralela ao eixo y entra em W em $y = x$ e sai de W em $y = 1 - z$. Então, $x \leq y \leq 1 - z$. Logo,

$$V(W) = \iint_{D_{xz}} \int_x^{1-z} dydxdz\,.$$

Portanto:

e) $V(W) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_x^{1-z} dydzdx$ f) $V(W) = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_x^{1-z} dydxdz$

Usemos o item (a) para calcular o volume de W.

$$V(W) = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} dzdydx = \int_0^1 \int_x^1 (1-y)dydx = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \text{ u.v.}$$

Exercício 4: Esboce o sólido W cujo volume é dado pela integral iterada

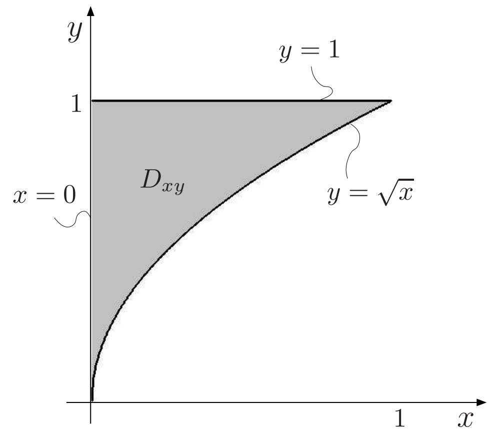
$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y^2} dzdydx$$

e reescreva na ordem $dxdydz$.

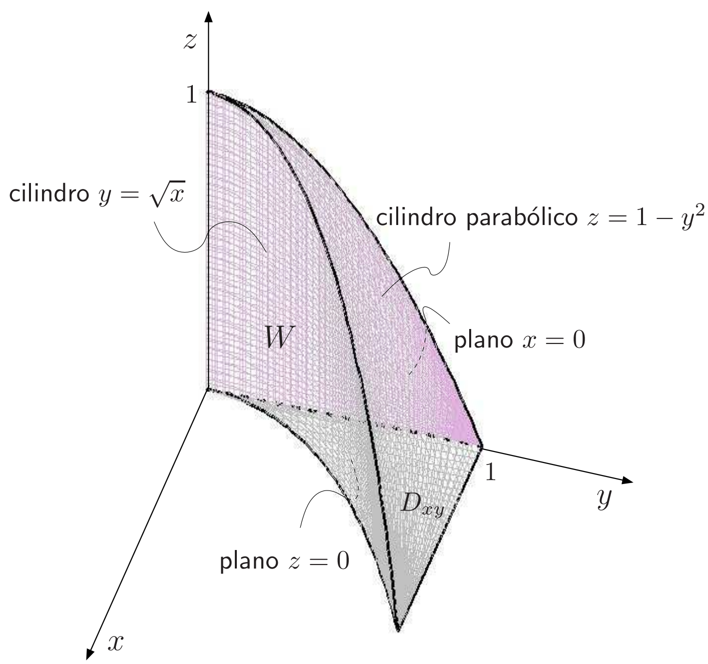
Solução: Temos,

$$I = \iiint_W dxdydz$$

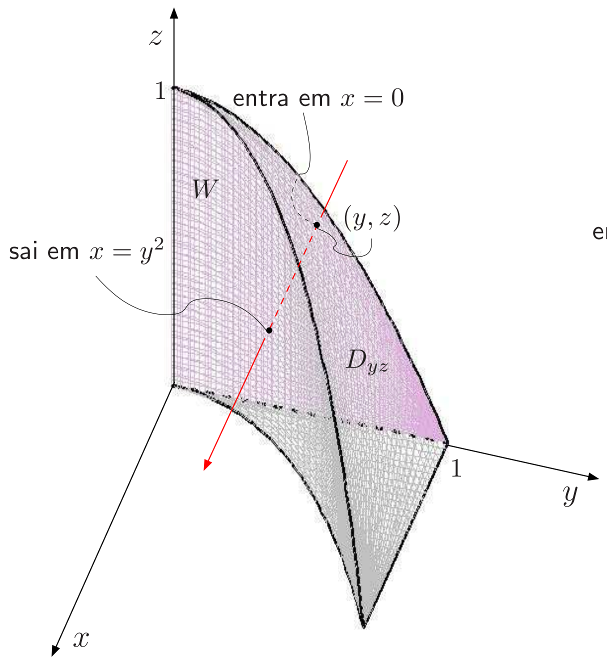
onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D_{xy}\,,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\}$ e $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{cases}$ é a projeção de W sobre o plano xy.

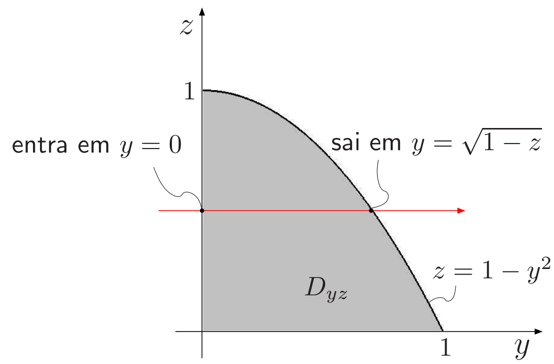


De $0 \leq z \leq 1 - y^2$ vemos que W é limitado superiormente pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e inferiormente pelo plano $z = 0$. Assim o esboço de W está representado na figura que se segue.



Para expressar a integral I na ordem $dxdydz$, devemos projetar W sobre o plano yz. Temos que $D_{yz} : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - z} \end{cases}$.





Além disso, a reta que passa por $(y, z) \in D_{yz}$ e é paralela ao eixo x entra em W em $x = 0$ e sai de W em $x = y^2$. Logo, $0 \leq x \leq y^2$. Então,

$$I = \iint\limits_{D_{yz}} \int_0^{y^2} dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{y^2} dxdydz\,.$$

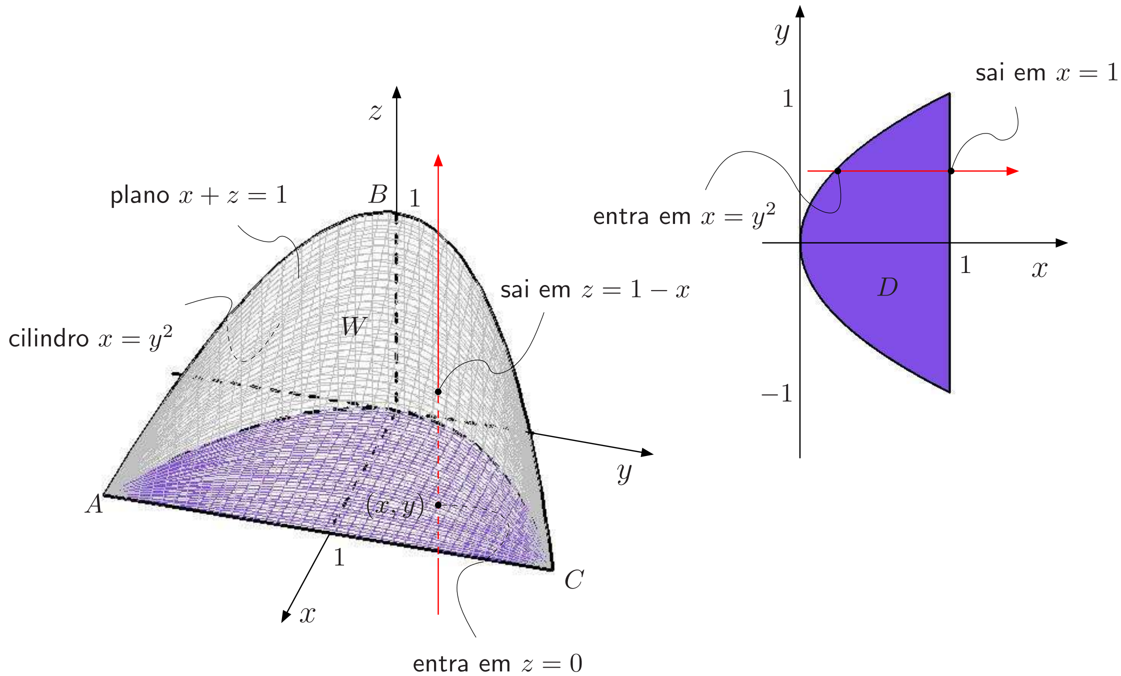
Exercício 5: Use a integral tripla para encontrar o volume do sólido

a) W limitado pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $z = 0$ e $x + z = 1$;

b) W limitado pelos planos $z + y = 8$, $z - y = 8$, $x = 0$, $x = 4$ e $z = 0$.

Solução:

a) Esboçando o cilindro $x = y^2$ e o plano $x + z = 1$, vemos que $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$ e $C = (1, 1, 0)$ são comuns. Ligando-os temos a curva interseção. Considerando que W é também limitado pelo plano $z = 0$, temos o esboço de W e sua projeção D sobre o plano xy representados na figura que se segue.



Temos $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D \text{ e } 0 \le z \le 1-x\}$ e $D_{xy} : \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 1 \end{cases}$. Portanto temos:

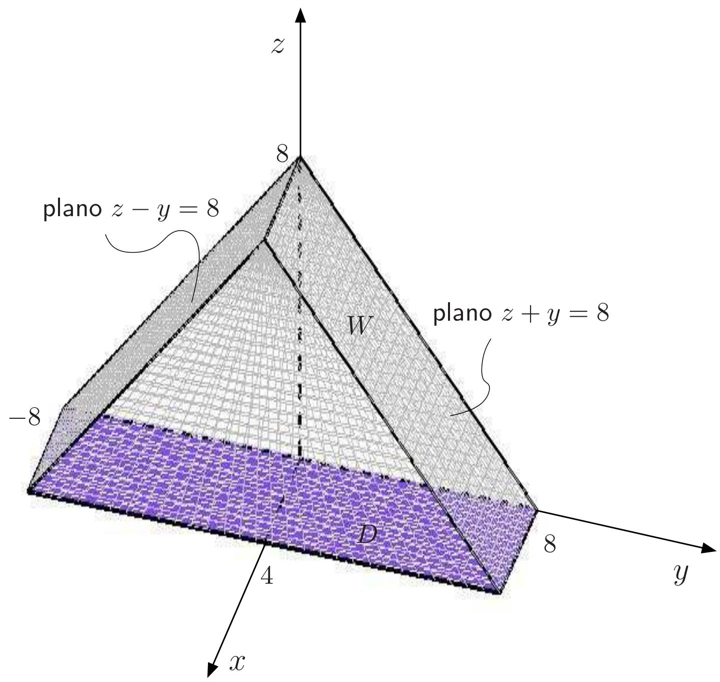
$$V(W) = \iiint\limits_W dV = \iint\limits_{D_{xy}} \int_0^{1-x} dz dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} (1-x)\, dx dy =$$

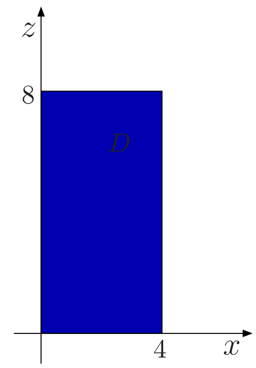
$$= \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} (1-x)\, dx dy = \int_{-1}^{1} \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(y^2 - \frac{y^4}{2}\right)\right] dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - y^2 + \frac{y^4}{2}\right) dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{10}\right]_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{15 - 10 + 3}{30} = \frac{8}{15} \textit{ u.v.}$$

b) O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.





Projetando W sobre o plano xz temos o retângulo D_{xz} : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases}$. A reta que passa por $(x,z) \in D$ e é paralela ao eixo y entra em W em $y = z - 8$ e sai de W em $y = 8 - z$. Então $z - 8 \leq y \leq 8 - z$. Portanto temos:

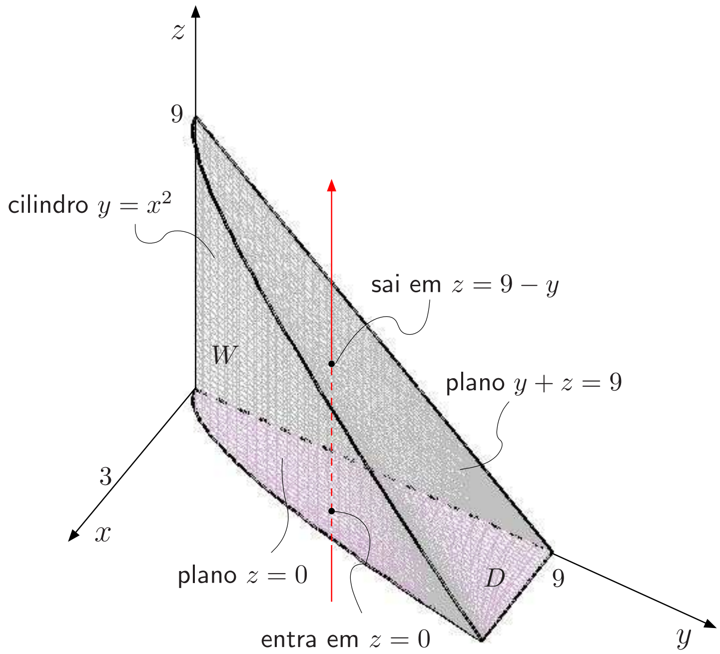
$$V(W) = \iiint\limits_W dV = \iint\limits_{D_{xz}} \int_{z-8}^{8-z} dydxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (8 - z - z + 8)\, dxdz =$$

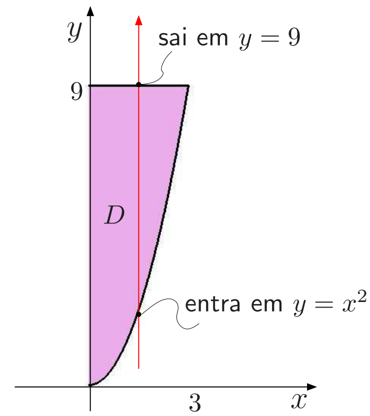
$$= 2 \iint\limits_{D_{xz}} (8 - z)\, dxdz = 2 \int_0^4 \int_0^8 (8 - z)\, dzdx = 2 \int_0^4 \left[8z - \frac{z^2}{2} \right]_0^8 dx =$$

$$= 2 \int_0^4 (64 - 32)\, dx = 2 \cdot 32 \int_0^4 dx = 64 \cdot 4 = 256 \text{ u.v.}$$

Exercício 6: Calcule a massa do sólido W no primeiro octante limitado por $y = x^2$, $y = 9$, $z = 0$, $x = 0$ e $y + z = 9$ se a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = x$.

Solução: Esboçando o cilindro $y = x^2$ e o plano $y + z = 9$ vemos que $A = (3,9,0)$ e $B = (0,0,9)$ são pontos comuns. Ligando-os temos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelos planos $x = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W e a sua projeção D sobre o plano xy na figura que se segue.





A reta que passa por $(x, y) \in D$ e é paralela ao eixo z entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = 9 - y$. Então, $0 \leq z \leq 9 - y$. Logo, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D$ e $0 \leq z \leq 9 - y\}$ onde $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 \leq y \leq 9 \end{cases}$. A massa de W é dada por

$$M = \iiint\limits_W \delta(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_W x\, dV = \iint\limits_D \int_0^{9-y} x\, dzdxdy =$$

$$= \iint\limits_D x(9 - y)\, dxdy = \int_0^3 x \int_{x^2}^9 (9 - y)\, dydx = \int_0^3 x \left[9y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^9 dx =$$

$$= \int_0^3 x \left[\left(81 - \frac{81}{2} \right) - \left(9x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \right] dx = \int_0^3 x \left(\frac{81}{2} - 9x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{81x}{2} - 9x^3 + \frac{x^5}{2} \right) dx = \left[\frac{81x^2}{4} - \frac{9x^4}{4} + \frac{x^6}{12} \right]_0^3 =$$

$$= \frac{81 \cdot 9}{4} - \frac{9 \cdot 81}{4} + \frac{3^6}{12} = \frac{3^5}{4} = \frac{243}{4} \text{ u.m.}$$

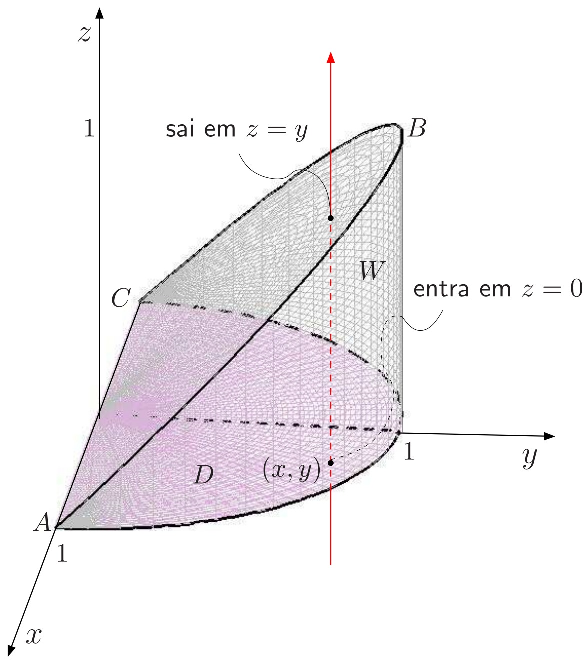
Exercício 7: Seja W um sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \geq 0$, e pelos planos $y = z$ e $z = 0$ com função densidade $\delta(x, y, z) = y$. Calcule:

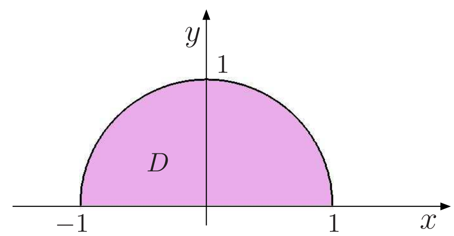
a) A massa de W.

b) O momento de inércia em relação ao eixo z.

Solução:

a) Esboçando o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \geq 0$ e o plano $y = z$ vemos que $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (-1,0,0)$ são comuns às superfícies. Ligando-os temos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelo plano $z = 0$, temos o sólido W e a sua projeção D sobre o plano xy representados na figura que se segue.





A reta que passa por $(x,y) \in D$ e é paralela ao eixo z entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = y$. Logo, $0 \leq z \leq y$. Assim, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1\,, y \geq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq y\}$. Então,

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_W y\ dV = \iint\limits_D \int_0^y y\,dzdxdy =$$

$$= \iint\limits_D y \cdot y\,dxdy = \iint\limits_D y^2\,dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares temos $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $dxdy = rdrd\theta$ e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$. Então,

$$M = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2\,\text{sen}^2\,\theta r\,drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^3\,\text{sen}^2\,\theta\,drd\theta =$$

$$= \int_0^1 r^3 \int_0^\pi \text{sen}^2\,\theta\,d\theta dr = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^\pi \int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}\ \textit{u.m.}$$

b) Temos,

$$I_z = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\,y\,dV =$$

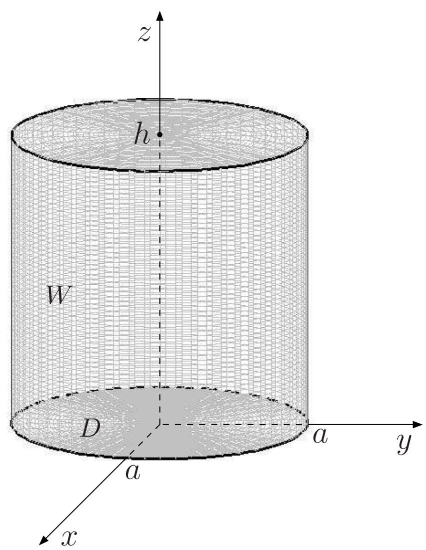
$$= \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,y\int_0^y dzdxdy = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,y^2\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2\cdot r^2\operatorname{sen}^2\theta\cdot r\,drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^5\operatorname{sen}^2\theta\,drd\theta =$$

$$= \int_0^1 r^5\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^\pi \int_0^1 r^5\,dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}\,.$$

Exercício 8: Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio de base a e altura h. Determine o momento de inércia do sólido em relação ao eixo de simetria, se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P até a base do sólido.

Solução: Vamos escolher os eixos coordenados de tal maneira que o eixo de simetria seja o eixo z e a base esteja no plano xy. Então a equação da superfície cilíndrica sobre o plano xy é $x^2+y^2=a^2$, com $0\le z\le h$.



Então $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x,y)\in D : x^2+y^2\le a^2 \text{ e } 0\le z\le h\}$. Como a densidade em $P=(x,y,z)$ é proporcional à distância de P à base do sólido W, a função densidade é $\delta(x,y,z)=kz$, onde k é a constante de proporcionalidade.

Portanto, o momento de inércia em relação ao eixo z (eixo de simetria) é:

$$I_z = \iiint_W \left(x^2+y^2\right) \delta(x,y,z)\, dV = k \iiint_W \left(x^2+y^2\right)\, z\, dV =$$

$$= k \iint_D \int_0^h \left(x^2+y^2\right)\, z\, dzdxdy = k \iint_D \left(x^2+y^2\right) \int_0^h z\, dzdxdy =$$

$$= k \iint_D \left(x^2+y^2\right) \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{kh^2}{2} \iint_D \left(x^2+y^2\right)\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos $x^2+y^2=r^2$, $dxdy = r\,drd\theta$ e $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$.

Logo,

$$I_z = \frac{kh^2}{2} \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\, drd\theta = \frac{kh^2}{2} \iint_{D_{r\theta}} r^3\, drd\theta =$$

$$= \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3\, drd\theta = \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta =$$

$$= \frac{kh^2a^4}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{k\pi h^2 a^4}{4}\,.$$