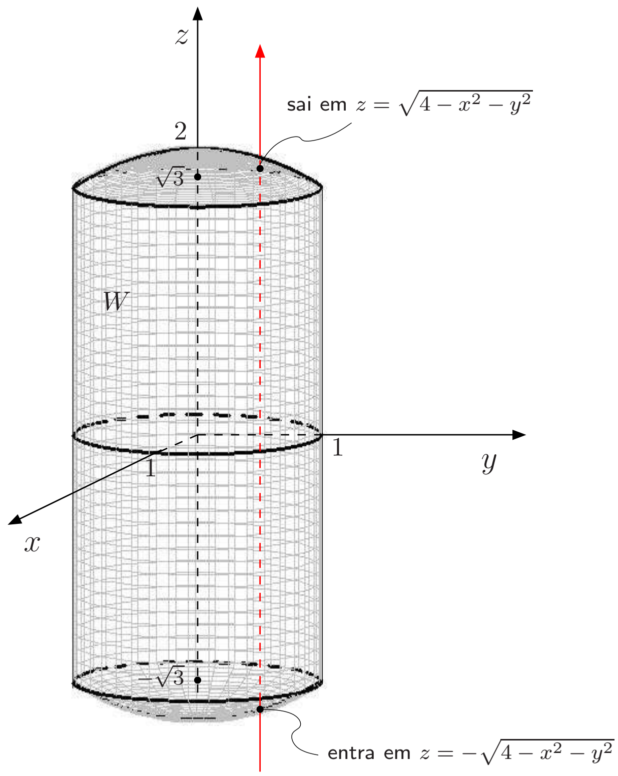
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 5 – Tutor

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iiint_W (x^2+y^2)\,dV$, onde W é a região interior ao cilindro $x^2+y^2=1$ e à esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=1$, temos $z^2=3$, portanto $z=\pm\sqrt{3}$ e $x^2+y^2=1$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Da figura vemos que

$$W=\left\{(x,y,z);\ (x,y)\in D: x^2+y^2\leq 1 \text{ e } -\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= r^2 \\ dV &= r\,dr\,d\theta\,dz \end{cases}$$

e W é descrito por

$$W_{r\theta z}:\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ -\sqrt{4-r^2}\leq z\leq\sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

Logo,

$$\iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right) dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r \; drd\theta dz = \int_0^1 r^3 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} \; d\theta dz dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \; dzdr = 2\pi \int_0^1 r^3 \cdot 2\sqrt{4-r^2} \; dr\,.$$

Fazendo $u = 4 - r^2$, teremos $du = -2r\;dr$ e $r^2 = 4 - u$.

Para $\begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$ teremos $\begin{cases} u = 4 \\ u = 3 \end{cases}$. Assim,

$$\iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right) dV = 2\pi \int_4^3 (4-u)u^{1/2}\;(-du) = -2\pi \int_4^3 \left(4u^{1/2} - u^{3/2}\right) du =$$

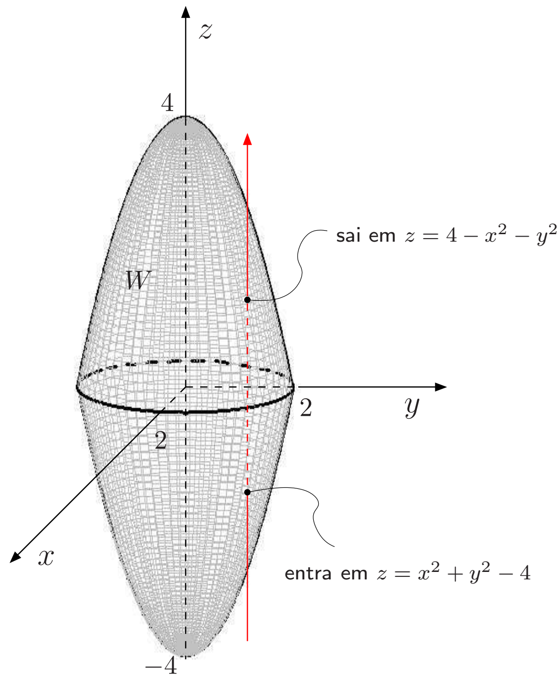
$$= 2\pi \int_3^4 \left(4u^{1/2} - u^{3/2}\right) du = 2\pi \left[4 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right]_3^4 =$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32\right) - \left(\frac{8}{3} \cdot 3\sqrt{3} - \frac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3}\right)\right] =$$

$$= 2\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} - 8\sqrt{3} + \frac{18}{5}\sqrt{3}\right) = \pi \left(\frac{256}{15} - \frac{44\sqrt{3}}{5}\right)\,.$$

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde W é a região limitada por $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solução: De $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$, temos $2x^2 + 2y^2 = 8$, portanto $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$. O que significa que a interseção ocorre no plano $z = 0$ segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Da figura, vemos que

$$W = \left\{(x,y,z);\ (x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } x^2+y^2-4 \leq z \leq 4-x^2-y^2\right\}\ .$$

Vamos calcular a integral usando coordenadas cilíndricas. Temos

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & = & \sqrt{r^2} = r \\ dV & = & r\,dr\,d\theta\,dz \end{cases}$$

com $(r,\theta,z) \in W_{r\theta z}$, onde $W_{r\theta z}$ é dado por $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ r^2-4 \leq z \leq 4-r^2 \end{cases}$. Dessa forma,

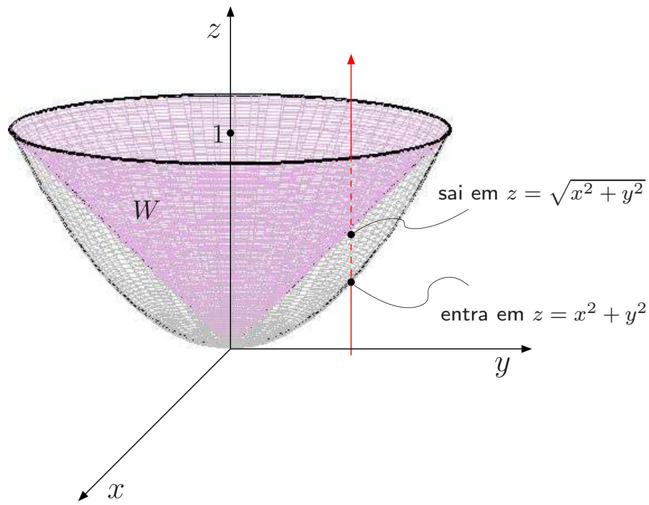
$$\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\ dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r \cdot r\ dr d\theta dz = \int_0^2 r^2 \int_{r^2-4}^{4-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dz dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2 \int_{r^2-4}^{4-r^2} dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \left(4-r^2-r^2+4\right) dr = 4\pi \int_0^2 \left(4r^2-r^4\right) dr =$$

$$= 4\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = 4\pi \left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right] = \frac{256}{15}\pi\,.$$

Exercício 3: Use a integral tripla para calcular o volume do sólido W acima do paraboloide $z = x^2+y^2$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução: De $z = x^2+y^2$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\left(\text{ou } z^2 = x^2+y^2\right)$ temos $z^2 = z$ ou $z^2 - z = 0$ ou $z(z-1) = 0$ portanto $z = 0$ ou $z = 1$. Logo, as superfícies se interceptam em $(0,0,0)$ e também no plano $z = 1$, segundo a circunferência $x^2+y^2 = 1$. Com isso, o esboço do sólido W está representado na figura que se segue.



Da figura vemos que

$$W = \left\{(x, y, z);\ (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

Temos por integral tripla que $V(W) = \iiint\limits_W dV$. Vamos calcular a integral utilizando coordenadas cilíndricas. Temos,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \\ dxdydz = dV = r\,dr\,d\theta\,dz \end{cases}$$

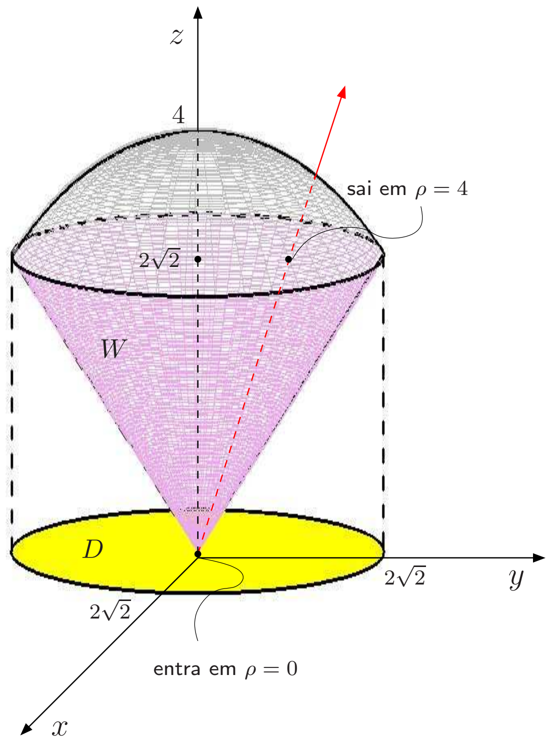
com $(r, \theta, z) \in W_{r\theta z}$, onde $W_{r\theta z}$ é dado por $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r^2 \leq z \leq r \end{cases}$. Logo, o volume será:

$$V(W) = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r\ drd\theta dz = \int_0^1 r \int_{r^2}^r \int_0^{2\pi} d\theta dzdr = 2\pi \int_0^1 r \int_{r^2}^r dzdr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\left(r - r^2\right) dr = 2\pi \int_0^1 \left(r^2 - r^3\right) dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ u.v.}$$

Exercício 4: Calcule $\iiint\limits_W \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$, sendo W a região limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução: De $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ou $z^2 = x^2 + y^2$), temos $2\left(x^2 + y^2\right) = 16$ ou $x^2 + y^2 = 8$ e $z = 2\sqrt{2}$. Logo, a interseção é uma circunferência contida no plano $z = 2\sqrt{2}$ de centro $\left(0, 0, 2\sqrt{2}\right)$ e raio $2\sqrt{2}$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Vamos passar para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}.$$

Descrição de W em coordenadas esféricas:

Como a projeção de W no plano xy é o disco $D : x^2 + y^2 \leq 8$, então $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por um ponto P no interior de W consideramos a semirreta OP. Vemos que ela entra na origem onde $\rho = 0$ e sai de W em um ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, onde $\rho = 4$. Logo, $0 \leq \rho \leq 4$. Finalmente, efetuando uma "varredura" no sólido W a partir do eixo z positivo onde $\phi = 0$, vemos que esta varredura finaliza na parede do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde $\phi = \frac{\pi}{4}$. Assim, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Portanto, a descrição de W em coordenadas esféricas é:

$$W_{\rho\phi\theta} = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Assim,

$$\iiint\limits_W \left(x^2+y^2+z^2\right) dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \left(\rho^2\right) \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta =$$

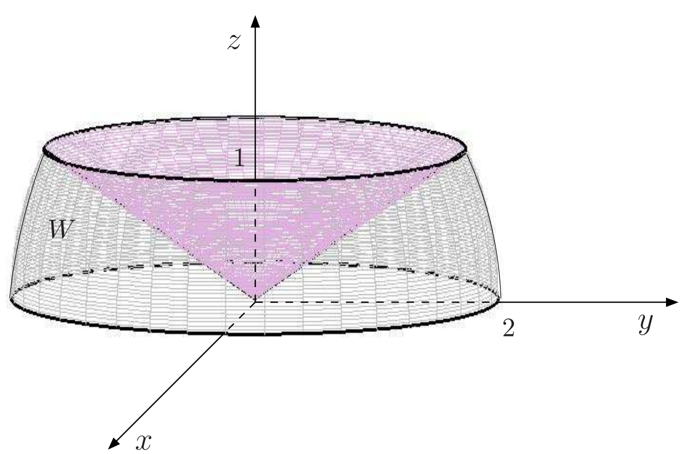
$$= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \int_0^4 \rho^4 \int_0^{2\pi} \; d\theta d\rho d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \int_0^4 \rho^4 \; d\rho d\phi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^4 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \; d\phi = \frac{2\cdot 4^5\pi}{5}\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{2\cdot 4^5\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4^5\pi}{5}\left(2-\sqrt{2}\right) .$$

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2=4$ e $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ $\left(\text{ou } z^2=\dfrac{x^2+y^2}{3}\right)$ temos $x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{3}=4$ ou $4\left(x^2+y^2\right)=12$, portanto $x^2+y^2=3$ e $z=1$. Logo, a interseção é a circunferência $x^2+y^2=3$ contida no plano $z=1$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Descrição de W em coordenadas esféricas:

Como a projeção de W sobre o plano xy é o disco $D : x^2+y^2 \leq 4$, então $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Considerando uma semirreta pela origem, no interior de W, vemos que ela entra em W na origem, onde $\rho=0$ e sai de W em um ponto da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, onde $\rho=2$. Logo, $0\leq\rho\leq 2$. Temos

$$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \rho\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\operatorname{sen}\phi \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\phi = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{3}\,.$$

Efetuando uma "varredura" em W, ela começa na parede do cone, onde $\phi = \pi/3$ e termina no plano $z = 0$, onde $\phi = \pi/2$. Logo, $\pi/3 \le \phi \le \pi/2$. Assim, temos

$$W_{\rho\phi\theta}\left\{\begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \\ \pi/3 \le \phi \le \pi/2 \end{array}\right. .$$

Temos,

$$V(W) = \iiint\limits_W dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta = \int_0^2 \rho^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho^2 \left[-\cos\phi\right]_{\pi/3}^{\pi/2} \; d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3} \quad \textit{u.v.}$$

Exercício 6: Faça o esboço do sólido W cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi$$

e calcule essa integral.

Solução: Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região W descrita em coordenadas esféricas por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \{(\rho,\phi,\theta);\; 0 \le \phi \le \pi/3\,,\; 0 \le \theta \le 2\pi\,,\; 0 \le \rho \le \sec\phi\}\,.$$

Das coordenadas esféricas temos $z = \rho\cos\phi$, $x^2 + y^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi$ e $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta$. Logo,

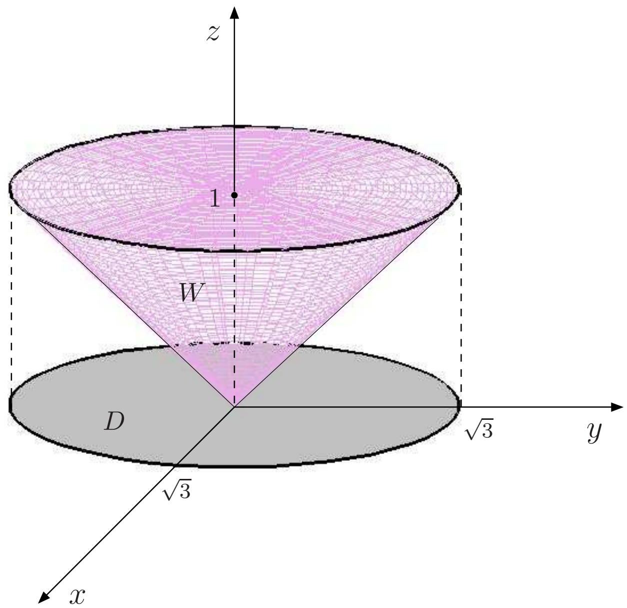
$$\phi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}\cos\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}\rho\cos\phi \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3}\,z \Rightarrow z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \text{ (cone)}$$

e, também,

$$\rho = \sec\phi \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\phi} = 1 \Rightarrow z = 1 \text{ (plano horizontal)}$$

Assim, o sólido W é limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ e superiormente pelo plano $z = 1$ e sua projeção no plano xy é o disco $D : x^2 + y^2 \le (\sqrt{3})^2$.



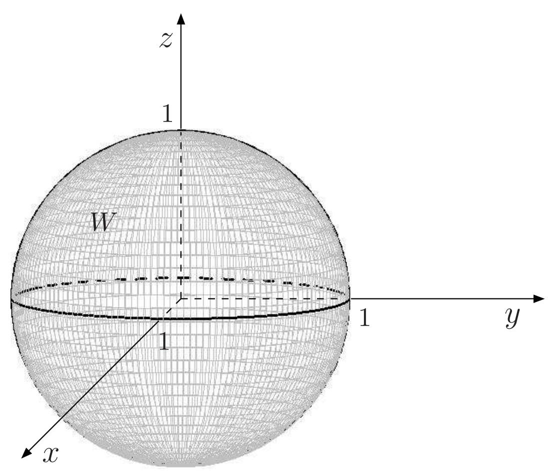
Temos então que:

$$\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta = \iiint\limits_W dV =$$

$$= \text{volume do cone } W = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \times \text{altura} = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 1 = \pi\,.$$

Exercício 7: Verificar que o centro de massa de uma esfera de raio 1 coincide com o seu centro, sabendo-se que a sua distribuição de massa é homogênea.

Solução: Vamos escolher os eixos coordenados de forma que a origem seja o centro da esfera de raio 1. Logo, o sólido W é limitado pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Como a distribuição de massa é homogênea, então o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ é dado por:

$$V(W)\overline{x} = \iiint\limits_W x\; dV\,, V(W)\overline{y} = \iiint\limits_W y\; dV \;\text{ e }\; V(W)\overline{z} = \iiint\limits_W z\; dV$$

onde $V(W) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Passando para coordenadas esféricas, temos $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$, $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta$ e $W_{\rho\phi\theta} : 0 \leq \rho \leq 1\,, 0 \leq \phi \leq \pi\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então

$$\iiint\limits_W x \; dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \int_0^1 \rho^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \; d\theta}_{=0} \; d\rho d\phi \;=\; 0$$

$$\iiint\limits_W y \; dV = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \phi \int_0^1 \rho^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \; d\theta}_{=0} \; d\rho d\phi \;=\; 0$$

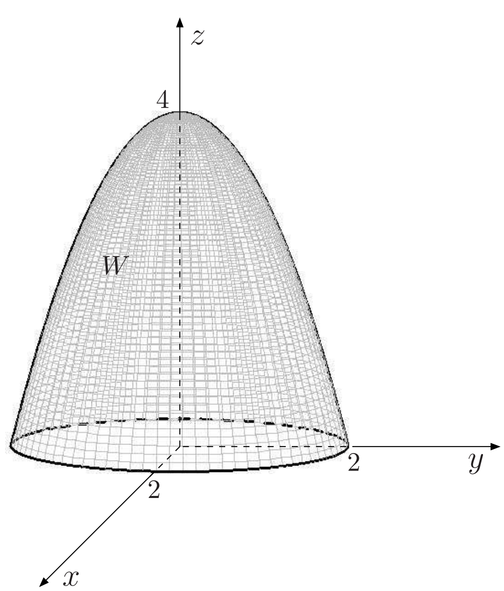
$$\iiint\limits_W z \; dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta = \int_0^1 \rho^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \phi \operatorname{sen} \phi \; d\phi d\theta d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{2} \right]_0^\pi}_{=0} \; d\theta d\rho \;=\; 0\,.$$

Então, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, 0)$, centro da esfera.

Exercício 8: Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$, sabendo que a densidade em um ponto é proporcional à distância de P ao plano xy.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



Temos $I_z = \iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$, onde $\delta(x,y,z) = k|z| = kz$ pois $z \geq 0$. Logo,

$$I_z = k\iiint\limits_W \left(x^2+y^2\right) z\,dV\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$I_z = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} \left(r^2 z\right) r\,drd\theta dz = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^3 z\,drd\theta dz$$

onde $W_{r\theta z}$ é dado por:

$$W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4-r^2 \end{cases}\,.$$

Logo,

$$I_z = k\int_0^2 r^3 \int_0^{4-r^2} z \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2k\pi \int_0^2 r^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-r^2} dr =$$

$$= k\pi \int_0^2 r^3\left(16-8r^2+r^4\right) dr = k\pi \int_0^2 \left(16r^3-8r^5+r^7\right) dr =$$

$$= k\pi\left[4r^4 - \frac{4r^6}{3} + \frac{r^8}{8}\right]_0^2 = k\pi\left(4\cdot 2^4 - \frac{4\cdot 2^6}{3} + \frac{2^8}{8}\right) =$$

$$= 2^6 k\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right) = 2^6 k\pi \frac{6-8+3}{6} = \frac{32}{3}k\pi\,.$$