Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 6 – Tutor

Exercício 1: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

a) C é o segmento de $(1,2)$ a $(-2,8)$.

b) C é a parte da parábola $y = 3x^2$ de $(-1,3)$ a $(2,12)$.

c) C é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0,0)$ a $(1,1)$.

d) C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.

e) C é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

f) C é o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, com $x \geq 0$.

g) C é a curva $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$.

h) C é a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$.

Solução:

a) Uma parametrização do segmento de reta que liga o ponto A ao ponto B é:

$$\overrightarrow{r}(t) = A + t(B - A)\,, \text{ com } 0 \leq t \leq 1\,.$$

Considerando $A = (1,2)$ e $B = (-2,8)$, temos

$$\overrightarrow{r}(t) = (1,2) + t\left((-2,8) - (1,2)\right) = (1,2) + t(-3,6) = (1 - 3t, 2 + 6t)\,, \text{ com } 0 \leq t \leq 1\,.$$

b) Se fizermos o parâmetro ser $t = x$, então temos as equações $x = t$, $y = 3t^2$, com $-1 \leq t \leq 2$. Então, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(t, 3t^2\right)\,, \text{ com } -1 \leq t \leq 2\,.$$

c) Se fizermos o parâmetro ser $t = y$, temos as equações $x = t^3$ e $y = t$, com $0 \leq t \leq 1$. Então, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(t^3, t\right)\,, \text{ com } 0 \leq t \leq 1\,.$$

d) Temos que $3x^2 + 8y^2 = 24$, se, e somente se, $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ (elipse de centro $(0,0)$ com semieixos $a = 2\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{3}$).

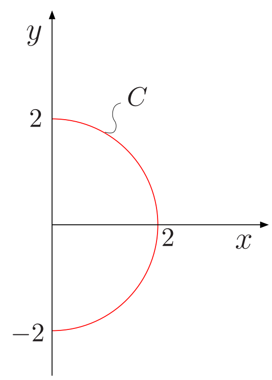
Lembrando que uma parametrização da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, no sentido anti-horário é dada por $\overrightarrow{r}(t)=(a\cos t\,,b\,\text{sen}\,t)$, com $0\leq t\leq 2\pi$, então uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t\,,\sqrt{3}\,\text{sen}\,t\right)\,,\ \text{com}\ 0\leq t\leq 2\pi\,.$$

e) Fazendo $u=x^{1/3}$ e $v=y^{1/3}$ e substituindo em $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ obtemos $u^2+v^2=1$, que é uma circunferência, no plano uv, de centro $(0,0)$ e raio 1. Logo, $u=\cos t$ e $v=\text{sen}\,t$, com $0\leq t\leq 2\pi$. Voltando para as variáveis originais, temos $x^{1/3}=\cos t$, $y^{1/3}=\text{sen}\,t$, $0\leq t\leq 2\pi$, portanto $x=\cos^3 t$, $y=\text{sen}^3\,t$, com $0\leq t\leq 2\pi$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(\cos^3 t\,,\text{sen}^3\,t\right)\,,\ \text{com}\ 0\leq t\leq 2\pi\,.$$

f) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Temos $x=2\cos t$, $y=2\,\text{sen}\,t$. Como $x\geq 0$ então $2\cos t\geq 0$, portanto $-\pi/2\leq t\leq \pi/2$. Logo, uma parametrização diferenciável de C no sentido anti-horário é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t)=(2\cos t\,,2\,\text{sen}\,t)\,,\ \text{com}\ -\pi/2\leq t\leq \pi/2\,.$$

g) Completando quadrados em $2x^2+2y^2-6x+4y-16=0$ temos:

$$2x^2-6x+2y^2+4y=16\ \Leftrightarrow\ x^2-3x+y^2+2y=8\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2+2y+1=8+\frac{9}{4}+1\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{45}{4}$$

que é uma circunferência de centro $\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$ e raio $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Então, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\cos t\,,-1+\frac{3\sqrt{5}}{2}\,\text{sen}\,t\right)\,,\ \text{com}\ 0\leq t\leq 2\pi\,.$$

h) Completando quadrados em $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$, temos

$$16\left(x^2 + 4x\right) + 9\left(y^2 - 2y\right) = 71 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 16\left(x^2 + 4x + 4\right) + 9\left(y^2 - 2y + 1\right) = 71 + 64 + 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 16\left(x+2\right)^2 + 9\left(y-1\right)^2 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{144}\left(x+2\right)^2 + \frac{9}{144}\left(y-1\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

que é uma elipse de centro $(-2, 1)$ e semieixos $a = 3$ e $b = 4$.

Então, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (-2 + 3\cos t\,, 1 + 4\,\mathrm{sen}\, t)\ , \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Exercício 2: Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em $\mathbb{R}^3$, interseção das superfícies dadas por

a) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.

b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.

c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $x + z = 1$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 1$.

e) $x^2 + y^2 = z^2\,, z \geq 0$ e $x = y^2$ do ponto $(0, 0, 0)$ a $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

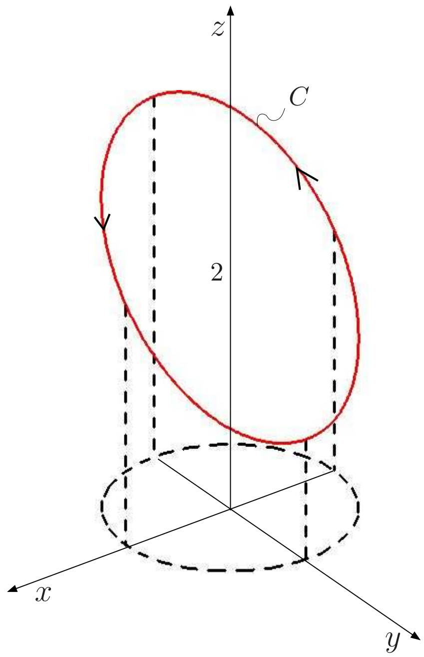
f) $z = 1 - y^2\,, z \geq 0$ e $2x + 3z = 6$ de $(3, 1, 0)$ a $(3, -1, 0)$.

g) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$.

h) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$.

Solução:

a) A curva C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$, cujo esboço está na figura que se segue:

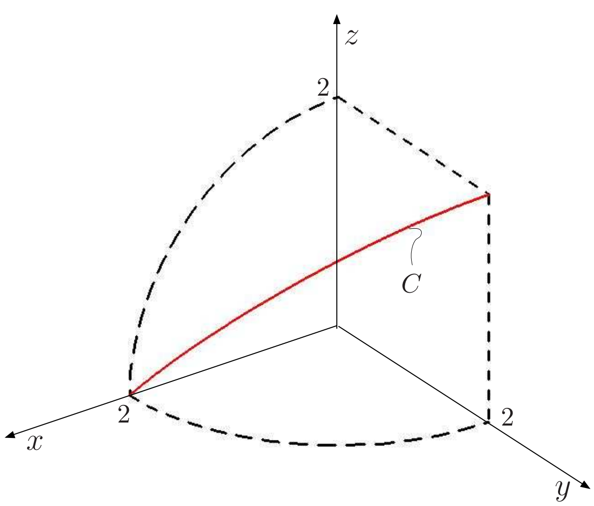


Como a projeção de C sobre o plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, então $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $y + z = 2$ então $z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$. Assim, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (\cos t\,, \operatorname{sen} t\,, 2 - \operatorname{sen} t)\ ,\ \text{ com }\ 0 \leq t \leq 2\pi\ .$$

Observe que com esta parametrização C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

b) A curva C é a interseção, no primeiro octante, dos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, cujo esboço está representado na figura que se segue.



A projeção de C sobre o plano xy é o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Logo, $x = 2\cos t$ e $y = 2\operatorname{sen} t$. Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $0 \leq t \leq \pi/2$. Como $x^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$, então:

$$z = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\cos^2 t} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t} = 2\,|\operatorname{sen} t| = 2\operatorname{sen} t$$

pois $0 \leq t \leq \pi/2$.

Assim, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t\,, 2\operatorname{sen} t\,, 2\operatorname{sen} t)\ , \text{ com } 0 \leq t \leq \pi/2\,.$$

c) A projeção de C sobre o plano xy é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ ou $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, onde $a = 3$ e $b = 2$. Então, $x = 3\cos t$ e $y = 2\operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = 1 - x$ então $z = 1 - 3\cos t$ e, assim, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (3\cos t\,, 2\operatorname{sen} t\,, 1 - 3\cos t)\ , \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

d) Temos,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, x + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (1-x)^2 + z^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - 2x + x^2 + z^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x + z^2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(x^2 - x\right) + z^2 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + z^2 = 24 + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{49}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{z^2}{\frac{49}{2}} = 1\,.$$

Assim, a projeção de C sobre o plano xz é a elipse $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} + \dfrac{z^2}{\frac{49}{2}} = 1$ com $a = \dfrac{7}{2}$, $b = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. Logo, $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\cos t$ e $z = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como $x + y = 1$ então $y = 1 - x = 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\cos t\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\cos t$. Portanto, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\cos t\,, \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\cos t\,, \frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\right)\ , \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

e) Se fizermos o parâmetro ser $t = y$, então temos as equações $x = t^2$ e $y = t$, com $0 \leq t \leq 1$. Como $x^2 + y^2 = z^2$, com $z \geq 0$, então:

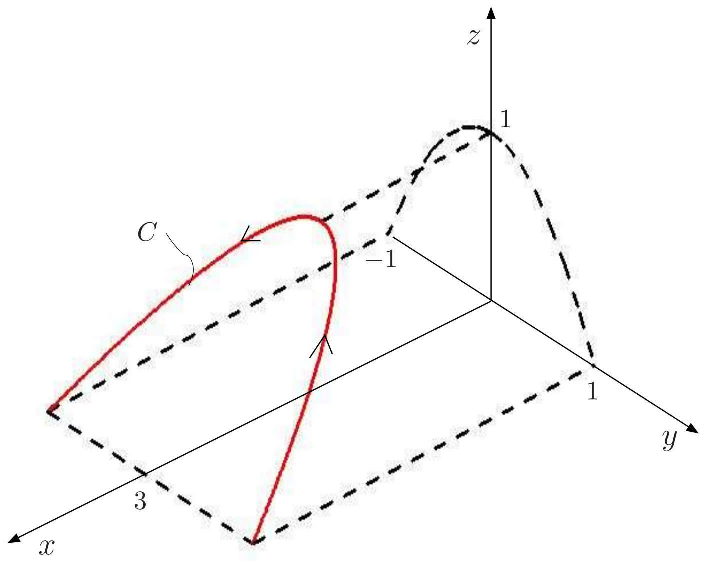
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^4 + t^2} = \sqrt{t^2\left(t^2 + 1\right)} = |t|\sqrt{t^2 + 1} = t\sqrt{t^2 + 1}$$

pois $0 \leq t \leq 1$.

Então, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(t^2\,, t\,, t\sqrt{t^2 + 1}\right)\ , \text{ com } 0 \leq t \leq 1\,.$$

f) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Se fizermos o parâmetro ser $t = -y$ temos as equações $y = -t$ e $z = 1 - t^2$, com $-1 \leq t \leq 1$. Como $2x + 3z = 6$, então $x = \dfrac{6-3z}{2} = \dfrac{6-3+3t^2}{2} = \dfrac{3+3t^2}{2}$. Logo, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{3+3t^2}{2}, -t, 1-t^2\right), \text{ com } -1 \leq t \leq 1.$$

g) Temos,

$$z = 3x^2 + y^2 \text{ e } z + 6x = 9 \iff 3x^2 + y^2 = 9 - 6x \iff$$

$$\iff 3x^2 + 6x + y^2 = 9 \iff 3(x^2 + 2x) + y^2 = 9 \iff$$

$$\iff 3(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 9 + 3 \iff 3(x+1)^2 + y^2 = 12 \iff$$

$$\iff \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Logo, a projeção de C sobre o plano xy é a elipse $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ onde $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$ e o centro é $(-1, 0)$. Logo, $x = -1 + 2\cos t$ e $y = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = 9 - 6x$ então $z = 9 - 6(-1 + 2\cos t) = 15 - 12\cos t$. Assim, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(-1 + 2\cos t, 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, 15 - 12\cos t\right), \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

h) A projeção de C sobre o plano xy é a circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (ou $x^2 + y^2 = 2x$). Logo, $x = 1 + \cos t$ e $y = \mathrm{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$, então:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - 2x} = \sqrt{4 - 2(1 + \cos t)} = \sqrt{4 - 2 - 2\cos t} = \sqrt{2 - 2\cos t} =$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos t)} = \sqrt{2 \cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}} = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}} = 2\left|\mathrm{sen}\frac{t}{2}\right| = 2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}$$

pois $0 \leq t \leq 2\pi$ portanto $0 \leq t/2 \leq \pi$.

Então, uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(1 + \cos t\,, \operatorname{sen} t\,, 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)\,, \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Exercício 3: Calcule $\displaystyle\int_C (xy + y + z)\ ds$ ao longo da curva $\overrightarrow{r}(t) = 2t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + t\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (2 - 2t)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, com $0 \leq t \leq 1$.

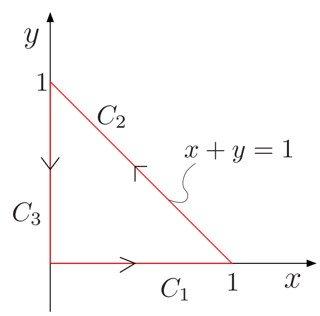
Solução: Temos $\overrightarrow{r'}(t) = (2, 1, -2)$, portanto $\|\overrightarrow{r'}(t)\| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Como $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt$, então $ds = 3\ dt$. Então,

$$\int_C (xy + y + z)\ ds = \int_0^1 \left(2t^2 + t + 2 - 2t\right) 3\ dt = 3\int_0^1 \left(2t^2 - t + 2\right) dt =$$

$$= 3\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^1 = 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{13}{2}\,.$$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\int_C (x + \sqrt{4}y)\ ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.



A curva C é a região das curvas C_1, C_2 e C_3. Logo,

$$\int_C (x + 4\sqrt{y})\, ds = \int_{C_1} (x + 4\sqrt{y})\, ds + \int_{C_2} (x + 4\sqrt{y})\, ds + \int_{C_3} (x + 4\sqrt{y})\, ds\,.$$

Uma parametrização de C_1 é $\overrightarrow{r}(t) = (t, 0)$, com $t \in [0,1]$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = (1,0)$, portanto $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt = dt$. Portanto:

$$\int_{C_1} (x + 4\sqrt{y})\, ds = \int_0^1 \left(t + 4\sqrt{0}\right) dt = \int_0^1 t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Uma parametrização de C_2 é $\overrightarrow{r}(t) = (1-t, t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = (-1, 1)$, e portanto $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt = \sqrt{2}\ dt$. Assim,

$$\int_{C_2} (x + 4\sqrt{y})\, ds = \int_0^1 \left(1 - t + 4\sqrt{t}\right)\sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}\left[t - \frac{t^2}{2} + 4 \cdot \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{19\sqrt{2}}{6}\,.$$

Uma parametrização de C_3 é $\overrightarrow{r}(t) = (0, 1-t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = (0, -1)$, e portanto $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt = \ dt$. Portanto:

$$\int_{C_3} (x + 4\sqrt{y})\ \ ds = \int_{C_3} \left(0 + 4(1-t)^{1/2}\right)\ dt = -4 \cdot \frac{2}{3}\left[(1-t)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{8}{3}(0-1) = \frac{8}{3}\,.$$

Logo,

$$\int_C (x + 4\sqrt{y})\, ds = \frac{1}{2} + \frac{19\sqrt{2}}{6} + \frac{8}{3} = \frac{19}{6}\left(1 + \sqrt{2}\right)\,.$$

Exercício 5: Calcule a integral $\int_C \left(x^2 + y^2\right) ds$, onde C é a quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, situada no primeiro octante.

Solução: Temos,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ \text{ e } \ y = x\,,\ \text{ com } \ x, y, z \geq 0 \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ 2x^2 + z^2 = 4\,,\ \text{ com } \ x, z \geq 0 \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1\,,\ \text{ com } \ x, z \geq 0\,.$$

Logo, a projeção de C no plano xz é o arco da elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$, com $x\,,\, z \geq 0$. Assim $x = \sqrt{2}\cos t$ e $z = 2\,\mathrm{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$.

Como $y = x$ então $y = \sqrt{2}\cos t$. Então uma parametrização de C é dada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t\,,\, \sqrt{2}\cos t\,,\, 2\,\mathrm{sen}\, t\right)\,,\ \text{ com } \ 0 \leq t \leq \pi/2\,.$$

Portanto, $\overrightarrow{r'}(t) = \left(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\,,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\,,\, 2\cos t\right)$, portanto

$$ds = \|\overrightarrow{r'}(t)\|\, dt = \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\, t + 2\,\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}\ dt = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}\ dt = 2\ dt\,.$$

Assim,

$$\int_C \left(x^2 + y^2\right)\ ds = \int_0^{\pi/2} \left(2\cos^2 t + 2\,\mathrm{sen}^2\, t\right) 2\ dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}\left[t + \frac{\mathrm{sen}\, 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi\,.$$

Exercício 6: Calcule a integral $\displaystyle\int_C \sqrt{3}xyz\ ds$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$, situada no primeiro octante.

Solução: A projeção de C sobre o plano xy é a circunferência $x^2+y^2=4$. Logo, $x=2\cos t$ e $y=2\,\mathrm{sen}\,t$. Como C está no primeiro octante, então $x\,,y\,,z\geq 0$. Logo, $0\leq t\leq \pi/2$. Como $x^2+y^2+z^2=16$, $z\geq 0$ e $x^2+y^2=4$, então $z=\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$. Assim, uma parametrização de C é dada por $\overrightarrow{r}(t)=\left(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 2\sqrt{3}\right)$, com $0\leq t\leq\pi/2$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t)=(-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 0)$ e $ds=\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\|dt=\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\,t+4\cos^2 t}\ dt=2\ dt$. Portanto:

$$\int_C \sqrt{3}\ xyz\ ds=\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}(2\cos t)\,(2\,\mathrm{sen}\,t)\left(2\sqrt{3}\right)2\ dt=8\sqrt{3}\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{sen}\,t\ dt=$$

$$=24\left[\frac{\mathrm{sen}^2\,t}{2}\right]_0^{\pi/2}=12\,.$$