Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 7 – Tutor

Exercício 1: Use a integral de linha para encontrar a área da superfície lateral sobre a curva C e abaixo da superfície $z = f(x,y)$, onde

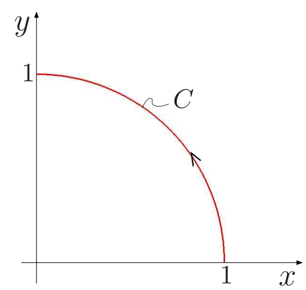
a) $C : x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$ de $(1,0)$ a $(0,1)$ e $f(x,y) = xy$

b) $C : y = 1 - x^2$ de $(1,0)$ a $(0,1)$ e $f(x,y) = x$

Solução:

a) Sabemos da teoria que a área da superfície lateral S, sobre a curva C e abaixo do gráfico de $z = f(x,y)$, onde $f(x,y) \geq 0$ e contínua em C é dada por $A(S) = \int_C f(x,y)\, ds$.

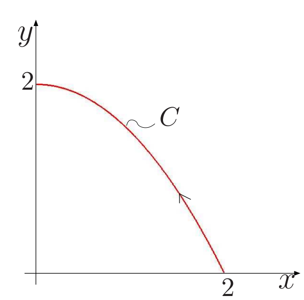
O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $f(x,y) = xy \geq 0$ em C. Além disso, f é contínua em C. Então, $A(S) = \int_C xy\, ds$, onde C é parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Temos, $\overrightarrow{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, portanto $\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ e, portanto, $ds = \left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\| dt = dt$. Assim

$$A(S) = \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \quad \textit{u.a.}$$

b) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Se fizermos o parâmetro ser $t = -x$, então temos as equações $x = -t$ e $y = 1-t^2$, com $-1 \leq t \leq 0$. Então, uma parametrização de C é $\overrightarrow{r}(t) = (-t\,, 1-t^2)$, com $-1 \leq t \leq 0$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = (-1, -2t)$, portanto $\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{1+4t^2}$ e $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt = \sqrt{1+4t^2}\ dt$.

Temos

$$A(S) = \int_C f(x,y)\ ds = \int_C x\ ds = \int_{-1}^{0} (-t)\sqrt{1+4t^2}\ dt = -\int_{-1}^{0} t\left(1+4t^2\right)^{1/2} dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_{-1}^{0}\left(1+4t^2\right)^{1/2}\ d\left(1+4t^2\right) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(1-5\sqrt{5}\right) = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\ \textit{u.a.}$$

Exercício 2: Determine a massa de um fio com a forma da curva $y = \ln x$, com $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$, se a densidade em cada ponto é igual ao quadrado da abscissa do ponto.

Solução: Pede-se $M = \int_C \delta(x,y)\ ds$, onde $\delta(x,y) = x^2$. Uma parametrização de C é $\overrightarrow{r}(t) = (t, \ln t)$, com $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{8}$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right)$, com $t > 0$ e $\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$. Como $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt$, então $ds = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\ dt$. Assim:

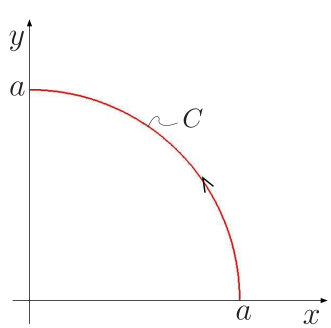
$$M = \int_C x^2 ds = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} t^2\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\ dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} t\left(\sqrt{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\left(t^2+1\right)^{1/2}\ d\left(t^2+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(t^2+1\right)^{3/2}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(9^{3/2}-4^{3/2}\right) = \frac{1}{3}(27-8) = \frac{19}{3}\ \textit{u.m.}$$

Exercício 3: Determine a massa de uma quarta parte da circunferência $x^2+y^2=a^2$, situada no primeiro quadrante se a densidade em cada ponto é igual a ordenada desse ponto.

Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como a densidade em $(x,y) \in C$ é igual à ordenada y, então $\delta(x,y) = y$. Logo, a massa M é dada por

$$M = \int_C \delta(x,y)\ ds = \int_C y\ ds$$

onde $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t\,, a\,\mathrm{sen}\, t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, é uma parametrização de C.

Temos $\overrightarrow{r'}(t) = (-a\,\mathrm{sen}\, t\,, a\cos t)$, portanto $\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\, t + a^2\cos^2 t} = a$.

Como $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt$ então $ds = a\ dt$. Assim:

$$M = \int_0^{\pi/2} (a\,\mathrm{sen}\, t)\, a\ dt = a^2 \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = a^2 \quad \textit{u.m.}$$

Exercício 4: Calcule o centro de massa do fio C parametrizado por $\overrightarrow{r}(t) = (t,t,t)$, com $0 \leq t \leq 1$, com densidade linear $\delta(x,y,z) = xyz$.

Solução: Temos $\overrightarrow{r'}(t) = (1,1,1)$, $\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ e $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt = \sqrt{3}\ dt$. O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ é dado por

$$M\overline{x} = \int_C x\delta(x,y,z)\ ds = \int_C x\,(xyz)\ \ ds = \int_C x^2yz\ ds$$

$$M\overline{y} = \int_C y\delta(x,y,z)\ ds = \int_C y\,(xyz)\ \ ds = \int_C xy^2z\ ds$$

$$M\overline{z} = \int_C z\delta(x,y,z)\ ds = \int_C z\,(xyz)\ \ ds = \int_C xyz^2\ ds$$

Cálculo de M

Temos

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\ ds = \int_C xyz\ ds = \int_0^1 t^3\sqrt{3}\ dt = \sqrt{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \textit{u.m.}$$

Cálculo de $\displaystyle\int_C x^2yz\ ds$:

Temos

$$\int_C x^2yz\ ds = \int_0^1 t^2 \cdot t \cdot t\sqrt{3}\ dt = \sqrt{3}\int_0^1 t^4\ dt = \sqrt{3}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{5}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int_C xy^2z\ ds$:

Temos

$$\int_C xy^2z\ ds = \sqrt{3}\int_0^1 t^4\ dt = \sqrt{3}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{5}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int_C xyz^2\ ds$:

Temos

$$\int_C xyz^2\ ds = \sqrt{3}\int_0^1 t^4\ dt = \sqrt{3}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{5}\,.$$

Substituindo acima, vemos que o centro de massa é dado por:

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{\sqrt{3}/5}{\sqrt{3}/4}\,,\frac{\sqrt{3}/5}{\sqrt{3}/4}\,,\frac{\sqrt{3}/5}{\sqrt{3}/4}\right) = \left(\frac{4}{5}\,,\frac{4}{5}\,,\frac{4}{5}\right)\,.$$

Exercício 5: Seja C um fio delgado com a forma da interseção da superfície $x^2+y^2+z^2=5$, com $z\geq 0$ com o plano $x+y=1$. Calcule o momento de inércia de C em relação ao eixo z, se a densidade em cada ponto é proporcional à sua distância ao plano xy.

Solução: Temos que:

$$x^2+y^2+z^2=5\,,z\geq 0 \text{ e } x+y=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+(1-x)^2+z^2=5\,,z\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+1-2x+x^2+z^2=5\,,z\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-2x+z^2=4\,,z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(x^2-x\right)+z^2=4\,,z\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+z^2=4+\frac{1}{2}\,,z\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{2}\,,z\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1/2)^2}{9/4}+\frac{z^2}{9/2}=1\,,z\geq 0\,.$$

Assim, a projeção de C sobre o plano xz é a semielipse $\dfrac{(x-1/2)^2}{9/4}+\dfrac{z^2}{9/2}=1$, com $z\geq 0$ de centro $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ e semieixos $a=\dfrac{3}{2}$ e $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Então $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos t$ e $z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t$. Como $z\geq 0$ então $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\geq 0$ ou $\operatorname{sen} t\geq 0$ portanto $0\leq t\leq\pi$. Como $x+y=1$ então $y=1-x=1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos t\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\cos t$. Assim, uma parametrização de C é dada por

$$\overrightarrow{r}(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos t\,,\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos t\,,\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\,,0\leq t\leq\pi\,.$$

Logo, $\overrightarrow{r}'(t)=\left(-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} t\,,\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} t\,,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t\right)$ e

$$\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\| = \sqrt{\frac{9}{4}\operatorname{sen}^2 t+\frac{9}{4}\operatorname{sen}^2 t+\frac{9}{2}\cos^2 t} = \sqrt{\frac{9}{2}\operatorname{sen}^2 t+\frac{9}{2}\cos^2 t} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

Como $ds = \left\| \overrightarrow{r'}(t) \right\| dt$ então $ds = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,dt$. O momento de inércia em relação ao eixo z é dada por

$$I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y,z)\; ds$$

onde $\delta(x,y,z) = k\,|z| = kz$ pois $z \geq 0$, com $k > 0$ uma constante. Então,

$$I_z = \int_C \left(x^2+y^2\right) kz\; ds = k \int_0^\pi \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos t\right)^2\right] \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right) \frac{3\sqrt{2}}{2}\; dt =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 k \int_0^\pi 2\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cos^2 t\right) \mathrm{sen}\, t\; dt = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{4}k \int_0^\pi \left(1 + 9\cos^2 t\right) \mathrm{sen}\, t\; dt =$$

$$= \frac{9}{4}k \left[-\cos t - 9\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{9}{4}k(2+6) = 18k\,.$$

Observe que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$.

Exercício 6: Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\, t$ e $z = 4t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, se a densidade for $\delta(x,y,z) = \dfrac{kx}{1+y^2}$, com $k > 0$.

Solução: Seja $\overrightarrow{r}(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t, 4t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = (-3\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t, 4)$, $\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Como $ds = \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| dt$ então $ds = 5\;dt$. A massa M é dada por

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\; ds = k \int_C \frac{x}{1+y^2}\; ds = k \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos t}{1 + 9\,\mathrm{sen}^2 t} 5\; dt = 5k \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos t}{1 + (3\,\mathrm{sen}\, t)^2}\; dt\,.$$

Fazendo $u = 3\,\mathrm{sen}\, t$, temos $du = 3\cos t\; dt$. Para $t = 0$ e $t = \pi/2$ temos $u = 0$ e $u = 3$, respectivamente. Logo,

$$M = 5k \int_0^3 \frac{du}{1+u^2} = 5k \Big[\mathrm{arctg}\;\; u\Big]_0^3 = 5k\left(\mathrm{arctg}\, 3 - \mathrm{arctg}\, 0\right) = 5k\,\mathrm{arctg}\, 3\; \textit{u.m.}$$

Exercício 7: Calcule div$\overrightarrow{F}$ e rot$\overrightarrow{F}$ sendo:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z + \mathrm{sen}\, y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (z - x\cos y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$

Solução:

a) Se $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$ então:

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2z - 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(3x - z) + \frac{\partial}{\partial z}(y - 2x) = 0 + 0 + 0 = 0$$

e

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = (1-(-1), 2-(-2), 3-(-3)) = (2,4,6)\,.$$

b) Se $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z+\operatorname{sen} y)\overrightarrow{\mathbf{i}} - (z - x\cos y)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ então temos que $P = z+\operatorname{sen} y$, $Q = -(z-x\cos y) = -z + x\cos y$, $R = 0$. Então,

$$\text{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 - x\operatorname{sen} y + 0 = -x\operatorname{sen} y$$

e

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\operatorname{sen} y & -z+x\cos y & 0 \end{vmatrix} = (0-(-1), 1-0, \cos y - \cos y) = (1,1,0)\,.$$

Exercício 8: Se $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ e $\overrightarrow{a}$ é um vetor constante, demonstre que rot $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 2\overrightarrow{a}$ e div$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 0$.

Solução: Se $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ e $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2,a_3)$ então:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x)\,.$$

Assim:

$$\text{div}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_2z - a_3y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_3x - a_1z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_1y - a_2x) = 0+0+0 = 0$$

e

$$\begin{aligned} \text{rot}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_2z - a_3y & a_3x - a_1z & a_1y - a_2x \end{vmatrix} \\ &= (a_1 - (-a_1), a_2 - (-a_2), a_3 - (-a_3)) \\ &= (2a_1, 2a_2, 2a_3) \\ &= 2(a_1,a_2,a_3) \\ &= 2\overrightarrow{a}\,. \end{aligned}$$