Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

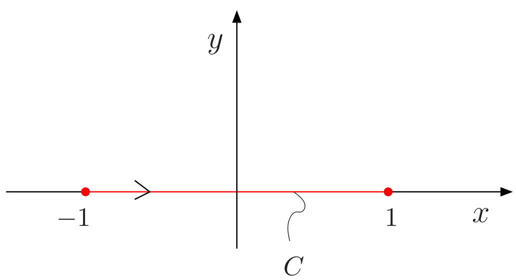
Cálculo III-A – Módulo 8 – Tutor

Exercício 1: Calcule $\int_C x\ dx + x^2\ dy$ de $(-1,0)$ a $(1,0)$

a) ao longo do eixo x;
b) ao longo de $C : \overrightarrow{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$, com $0 \leq t \leq \pi$;
c) ao longo da poligonal de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$.

Solução:

a) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de C é dada por $\overrightarrow{r}(t) = (t,0)$, com $-1 \leq t \leq 1$, portanto $\overrightarrow{r}'(t) = (1,0)$. Pondo $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,x^2)$, temos

$$\int_C x\ dx + x^2\ dy = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-1}^{1} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\ dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \overrightarrow{F}(t,0) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\ dt = \int_{-1}^{1} \left(t,t^2\right) \cdot (1,0)\, dt = \int_{-1}^{1} t\ dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

b) Temos que $\overrightarrow{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$ implica $\overrightarrow{r'}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$. Logo,

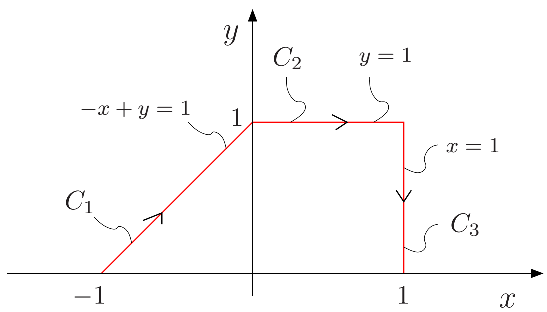
$$\int_C x\ dx + x^2\ dy = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^\pi \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^\pi \overrightarrow{F}(-\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt = \int_0^\pi \Big(-\cos t\,,\ \underbrace{\cos^2 t}_{=\ 1-\operatorname{sen}^2 t}\Big) \cdot (\operatorname{sen} t, \cos t)\ \ dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(-\cos t \operatorname{sen} t + \cos t - \operatorname{sen}^2 t \cos t\right)\ dt =$$

$$= \left[-\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^\pi = 0\,.$$

c) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Temos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Logo,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \qquad (1)$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_1 : y = 1 + x$, com $-1 \leq x \leq 0$. Logo, uma parametrização de C_1 é dada por $\overrightarrow{r}(t) = (t, 1+t)$, com $-1 \leq t \leq 0$, portanto $\overrightarrow{r'}(t) = (1, 1)$. Então,

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-1}^0 \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt = \int_{-1}^0 \overrightarrow{F}(t, 1+t) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(t, t^2\right) \cdot (1, 1)\ \ dt = \int_{-1}^0 \left(t + t^2\right)\ \ dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^0 =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

ou

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{1}{6} \qquad (2)$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $C_2 : y = 1$, com $0 \leq x \leq 1$. Logo, uma parametrização de C_2 é dada por $\overrightarrow{r}(t) = (t, 1)$, com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\overrightarrow{r'}(t) = (1, 0)$. Então,

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt = \int_0^1 \overrightarrow{F}(t, 1) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t, t^2\right) \cdot (1, 0)\ dt = \int_0^1 t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ou

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{1}{2} \qquad (3)$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Seja C_3^- o segmento C_3 com orientação contrária. Então, $C_3^- : x = 0$, com $0 \leq y \leq 1$. Logo, uma parametrização de C_3^- é $\overrightarrow{r}(t) = (1, t)$, com $0 \leq t \leq 1$ e portanto $\overrightarrow{r'}(t) = (0, 1)$. Então,

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_3^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_0^1 \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt =$$

$$= -\int_0^1 \overrightarrow{F}(1, t) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt = -\int_0^1 (1, 1) \cdot (0, 1)\ dt = -\int_0^1\ dt = [-t]_0^1 = -1$$

ou

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -1 \qquad (4)$$

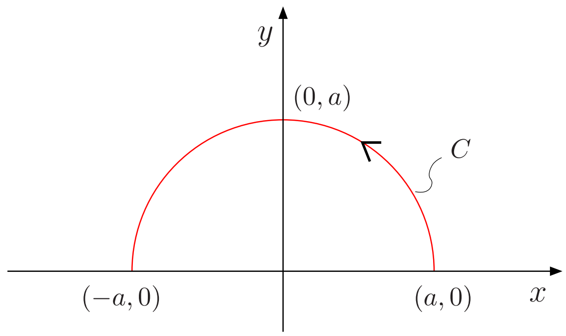
De (1), (2), (3) e (4), temos

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{2}{3}\,.$$

Exercício 2: Calcule os valores de $\displaystyle\int_C -2xy\ dx + (x^2 + y^2)\, dy$ ao longo do caminho C, onde C é a

a) parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(a, 0)$ a $(-a, 0)$;
b) parte superior da elipse $x^2 + 4y^2 = 2x$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Temos o esboço na figura a seguir.



Uma parametrização de C, orientada no sentido anti-horário, é $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Logo, $\gamma'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Sendo $\overrightarrow{F}(x,y) = (-2xy, x^2+y^2)$, temos

$$\overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \overrightarrow{F}(a\cos t, a\,\text{sen}\,t) \cdot (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t) =$$

$$= \big(-2a\cos t a\,\text{sen}\,t, \underbrace{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2\,t}_{=\,a^2}\big) \cdot (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t) =$$

$$= 2a^3\cos t\,\text{sen}^2\,t + a^3\cos t\,.$$

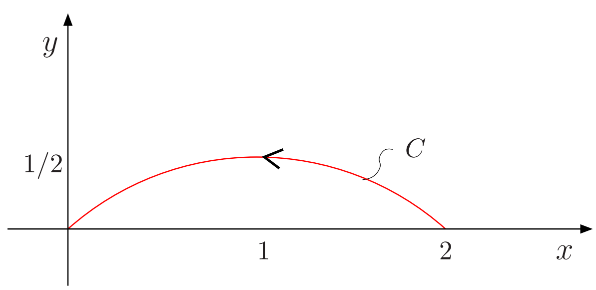
Como

$$I = \int_C -2xy\;dx + \left(x^2+y^2\right)dy = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\;dt$$

com $a=0$ e $b=\pi$, temos

$$I = \int_0^\pi \left(2a^3\cos t\,\text{sen}^2\,t + a^3\cos t\right)dt = \left[2a^3\frac{\text{sen}^3\,t}{3} + a^3\,\text{sen}\,t\right]_0^\pi = 0\,.$$

b) De $x^2+4y^2=2x$, com $y \geq 0$ temos $(x-1)^2+4y^2=1$, com $y \geq 0$ ou $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$, com $y \geq 0$.



Uma parametrização de C é $\gamma(t) = \left(1+\cos t, \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t\right)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Logo, temos

$\gamma'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t\right)$ e

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \overrightarrow{F}\left(1+\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)\cdot\left(-\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t\right) = \\
&= \left(-2(1+\cos t)\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, (1+\cos t)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t\right)\cdot\left(-\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t\right) = \\
&= (1+\cos t)\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{2}\big(1 + 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t}_{=\ 1-\operatorname{sen}^2 t}\big)\cos t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 t\cos t = \\
&= \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t\cos t + \frac{1}{2}\cos t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 t\cos t = \\
&= 1 + \frac{5}{8}\operatorname{sen}^2 t\cos t + \cos t\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I &= \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^\pi \overrightarrow{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt = \\
&= \int_0^\pi \left(1 + \frac{5}{8}\operatorname{sen}^2 t\cos t + \cos t\right) dt = \left[t + \frac{5}{8}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} + \operatorname{sen} t\right]_0^\pi = \pi\,.
\end{aligned}$$

Exercício 3: Calcule o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,-y)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde C_1: segmento de reta de $O = (0,0)$ a $A = (1,1)$; C_2: parte da curva $4x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 12 = 0$, com $y \geq 1$, do ponto $A = (1,1)$ a $B = (2,1)$; C_3: segmento de reta BO.

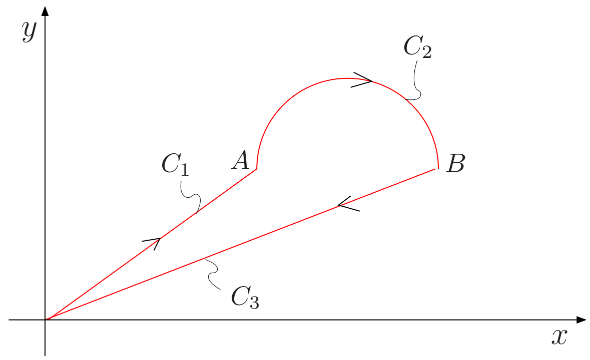
Solução:

Completando quadrados em $4x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 12 = 0$, com $y \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
&4\left(x^2 - 3x\right) + 4\left(y^2 - 2y\right) = -12\,, y \geq 1 \iff \\
&\iff 4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4\left(y^2 - 2y + 1\right) = -12 + 9 + 4\,, y \geq 1 \iff \\
&\iff 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y-1\right)^2 = 1\,, y \geq 1 \iff \\
&\iff \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1\,, y \geq 1
\end{aligned}$$

(semicircunferência superior de centro $(3/2, 1)$ e raio $1/2$).

Assim, o esboço de C está representado na figura que se segue.



O trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ ao longo de C é dado por

$$W = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Uma parametrização de C_1 é dada por $\overrightarrow{r}(t) = (t,t)$, com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\overrightarrow{r'}(t) = (1,1)$. Logo,

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt = \int_0^1 \overrightarrow{F}(t,t) \cdot \overrightarrow{r'}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^1 (t,-t) \cdot (1,1)\ dt = \int_0^1 (t-t)\ dt = \int_0^1 0\ dt = 0\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Uma parametrização de C_2, no sentido anti-horário, é

$$C_2^- : \overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos t\,, 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$y \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq \pi\,.$$

Logo, $\overrightarrow{r'}(t) = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,, \frac{1}{2}\cos t\right)$. Então,

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\pi} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t)\ dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos t\,, -1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,, \frac{1}{2}\cos t\right) dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t \cos t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t \cos t\right) dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t - \frac{1}{2}\cos t\right) dt =$$

$$= -\left[\frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi} = -\frac{3}{4}(-1-1) = \frac{3}{2}\,.$$

Cálculo de $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Uma parametrização de C_3 é dada por

$$\vec{r}(t) = B + t\,(O - B) = (2,1) + t\,((0,0) - (2,1)) =$$

$$= (2,1) + t\,(-2,-1) = (2-2t, 1-t)$$

com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\vec{r}'(t) = (-2,-1)$. Logo,

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t)\ dt = \int_0^1 (2-2t, -1+t) \cdot (-2,-1)\ dt =$$

$$= \int_0^1 (-4 + 4t + 1 - t)\ dt = \int_0^1 (-3+3t)\ dt = \left[-3t + \frac{3t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\,.$$

Logo,

$$W = 0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \ \ \textit{u.w.}$$

Exercício 4: Calcule $\int_C 2x\ dx - 3y\ dy + z^2\ dz$, onde C é o segmento de reta que une $(1,0,0)$ a $(0,1,\pi/2)$.

Solução: Uma parametrização do segmento C que liga $A = (1,0,0)$ a $B = (0,1,\pi/2)$ é dada por

$$\vec{r}(t) = A + t\,(B - A) = (1,0,0) + t\,[(0,1,\pi/2) - (1,0,0)] =$$

$$= (1,0,0) + t\,(-1,1,\pi/2) = (1-t, t, \pi/2t)\,,$$

com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\vec{r}'(t) = (-1,1,\pi/2)$. Pondo $\vec{F}(x,y,z) = (2x,-3y,z^2)$, temos

$$\int_C 2x\ dx - 3y\ dy + z^2\ dz = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^1 \vec{F}\left(1-t, t, \frac{\pi}{2}t\right) \cdot \vec{r}'(t)\ dt = \int_0^1 \left(2-2t, -3t, \frac{\pi^2}{4}t^2\right) \cdot \left(-1, 1, \frac{\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-2+2t-3t+\frac{\pi^3}{8}t^2\right) = \left[-2t - \frac{t^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}t^3\right]_0^1 = \frac{\pi^3}{24} - \frac{5}{2}\,.$$

Exercício 5: Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y,z) = (3y+z)\,\vec{\mathbf{i}} + (y-3x)\,\vec{\mathbf{j}} + (e^z + x)\,\vec{\mathbf{k}}$ para deslocar uma partícula ao longo da curva C interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $z=5$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: O trabalho é dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C, no sentido anti-horário quando vista de cima, é parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 5)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, portanto $\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$. Logo,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, 5) \cdot \vec{r}'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3\operatorname{sen} t + 5, \operatorname{sen} t - 3\cos t, e^5 + \cos t\right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-3\operatorname{sen}^2 t - 5\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t - 3\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-3\operatorname{sen}^2 t - 5\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t - 3\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-3 - 5\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t\right)\ dt = \left[-3t + 5\cos t + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$= -6\pi + 0 + 0 = -6\pi$ *u.w.*

Exercício 6: Calcule $\int_C z\ dx + y\ dy - x\ dz$, onde C é a interseção das superfícies $y+z=8$ e $x^2+y^2+z^2-8z=0$, com $x \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução: Temos

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2+z^2-8z=0\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & x^2+y^2+(8-y)^2-8\,(8-y)=0\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & x^2+y^2+64-16y+y^2-64+8y=0\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & x^2+2y^2-8y=0\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & x^2+2\,(y^2-4y)=0\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & x^2+2\,(y^2-4y+4)=8\,,x\geq 0\,,z=8-y \;\;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & \frac{x^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\,,x\geq 0\,,z=8-y\,.
\end{aligned}
$$

Logo, a projeção de C sobre o plano xy é a semielipse $\frac{x^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$, com $x\geq 0$, de centro $(0,2)$ e semieixos $a=2\sqrt{2}\,$, $b=2$. Então, uma parametrização de C, no sentido anti-horário quando vista de cima, é dada por $x=2\sqrt{2}\cos t$, $y=2+2\operatorname{sen} t$ e $z=8-y=8-(2+2\operatorname{sen} t)=6-2\operatorname{sen} t$.

Como $x\geq 0$, temos $2\sqrt{2}\cos t\geq 0$, isto é, $\cos t\geq 0$, portanto $-\pi/2\leq t\leq \pi/2$. Então, $\overrightarrow{r}(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t\,,2+2\operatorname{sen} t\,,6-2\operatorname{sen} t\right)$, com $-\pi/2\leq t\leq \pi/2$, e assim $\overrightarrow{r'}(t)=\left(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t\,,2\cos t\,,-2\cos t\right)$.

Pondo $\overrightarrow{F}=(z,y,-x)$, temos

$$
\begin{aligned}
& \int_C z\;dx+y\;dy-x\;dz=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\overrightarrow{F}\,(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r'}(t)\;dt= \\
& =\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(6-2\operatorname{sen} t\,,2+2\operatorname{sen} t\,,-2\sqrt{2}\cos t\right)\cdot\left(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t\,,2\cos t\,,-2\cos t\right)dt= \\
& =\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-12\sqrt{2}\operatorname{sen} t+4\sqrt{2}sen^2 t+4\cos t+4\operatorname{sen} t\cos t+4\sqrt{2}\cos^2 t\right)dt= \\
& =\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\sqrt{2}-12\sqrt{2}\operatorname{sen} t+4\cos t+4\operatorname{sen} t\cos t\right)dt= \\
& =\left[4\sqrt{2}t+12\sqrt{2}\cos t+4\operatorname{sen} t+2\operatorname{sen}^2 t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\sqrt{2}\pi+8\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 7: Sabe-se que o campo $\overrightarrow{F}=(e^{x+y}+1)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+ex+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre uma função potencial para $\overrightarrow{F}$.

b) Calcule $\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, com $x\geq 1$ que vai de $(1,0)$ a $(1,1)$.

Solução:

a) Vamos encontrar uma função potencial $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{x+y} + 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y} \quad (2)$$

em $\mathbb{R}^2$.

Integrando (1) em relação a x temos

$$\varphi(x,y) = \int \left(e^{x+y} + 1\right) dx = e^{x+y} + x + f(y) \quad (3),$$

onde $f(y)$ é uma "constante" de integração. Derivando (3) em relação a y e usando a igualdade (2) vem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y} + 0 + f'(y) = e^{x+y},$$

portanto $f'(y) = 0$ ou $f(y) = c$, c constante. Obtemos, então

$$\varphi(x,y) = e^{x+y} + x + c,$$

a família de funções potenciais de $\overrightarrow{F}$.

b) Fazendo $c = 0$ temos uma função potencial $\varphi(x,y) = e^{x+y} + x$. Logo, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(1,1) - \varphi(1,0) = \left(e^2 + 1\right) - (e+1) = e^2 - e\,.$$

Exercício 8: Determine uma função potencial para cada campo conservativo.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2xy\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy))\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (x^2\,\mathrm{sen}(xy))\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (6xy^3 + 2z^2\,, 9x^2y^2\,, 4xz + 1)$.

Solução:

a) Uma função potencial $\varphi(x,y)$ do campo $\overrightarrow{F} = (P,Q) = (x^2 + y^2, 2xy)$ é tal que dom$\varphi =$ $=$ dom$\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^2$ e $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ em $\mathbb{R}^2$, isto é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 + y^2 & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy & (2) \end{cases}$$

em $\mathbb{R}^2$. Integrando (1) em relação a x, temos

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + f(y) \qquad (3),$$

onde $f(y)$ é a "constante" de integração. Derivando a igualdade (3) em relação a y e usando a igualdade (2), obtemos

$$2xy + f'(y) = 2xy$$

ou $f'(y) = 0$, portanto $f(y) = c$ onde c é uma constante. Substituindo em (3), vemos que

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é a família de funções potenciais de $\overrightarrow{F}$.

b) Vamos encontrar uma função $\varphi(x,y)$, com $D = \text{dom}\,\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x^2\,\text{sen}(xy) \quad (2)$$

em $\mathbb{R}^2$. Integrando (2) em relação a y, obtemos

$$\varphi(x,y) = x\cos(xy) + f(x) \qquad (3)$$

onde $f(x)$ é a "constante" de integração. Derivando (3) em relação a x e usando (1), encontramos

$$\cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy) + f'(x) = \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy)$$

ou $f'(x) = 0$, portanto $f(x) = c$ onde c é uma constante. Assim, a família de funções potenciais de $\overrightarrow{F}$ é dada por

$$\varphi(x,y) = x\cos(xy) + c\,.$$

c) Queremos encontrar uma função $\varphi(x,y,z)$, com $D = \text{dom}\,\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$, tal que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 6xy^3 + 2z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 9x^2y^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 4xz + 1 \quad (3)$$

em $\mathbb{R}^3$. Integrando (1) em relação a x, temos

$$\varphi(x,y,z) = \int \left(6xy^3 + 2z^2\right) dx = 3x^2y^3 + 2xz^2 + f(y,z) \qquad (4),$$

onde $f(y,z)$ é uma "constante" de integração. Derivando (4) em relação a y e z e usando (2) e (3), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} 9x^2y^2 + \frac{\partial f}{\partial y} &= 9x^2y^2 \\ 4xz + \frac{\partial f}{\partial z} &= 4xz + 1 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 1 \end{aligned}$$

portanto $f(y,z) = z + c$, c constante. Substituindo em (4), vemos que o conjunto de todas as funções potenciais é dado por

$$\varphi(x,y,z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z + c\,.$$