Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 9

Aula 17 – Teorema de Green

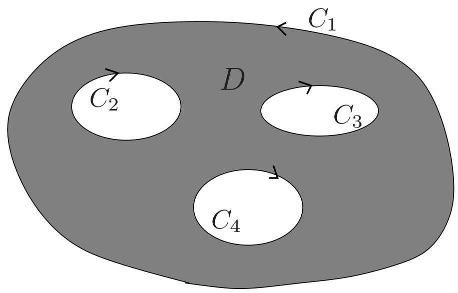
Objetivo

- Estudar um teorema que estabelece uma ligação importante entre integrais de linha e integrais duplas.

O Teorema de Green

Teorema: Seja D uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas, (isto é, ∂D está orientada positivamente). Seja $F = P(x,y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$. Então

$$\oint_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{\partial D^+} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



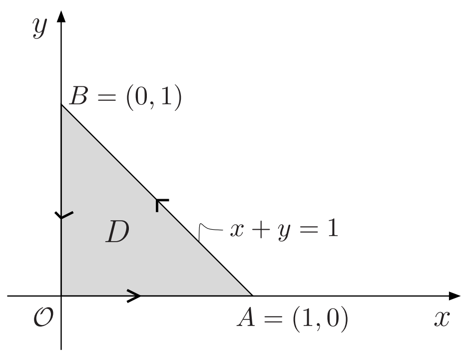
No caso, $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ e

$$\oint_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_2^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_3^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_4^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}\ .$$

OBS.: Geralmente, usamos o Teorema de Green, quando $\oint_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ é difícil de ser calculada diretamente.

Exemplo 1

Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x + y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (3y + 4x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, para D a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.



Temos $\partial D = \mathcal{O}A \cup AB \cup B\mathcal{O}$.

Cálculo de $\int_{\mathcal{O}A} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $\mathcal{O}A : y = 0$, $0 \le x \le 1$, portanto, $dy = 0$. Então

$$\int_{\mathcal{O}A} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\mathcal{O}A} P(x, 0)\, dx = \int_0^1 2x \; dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1\,.$$

Cálculo de $\int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

Temos $AB : x = 1 - y$, $0 \le y \le 1$, portanto, $dx = -dy$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{AB} P(1-y, y)\,(-dy) + Q(1-y, y)\, dy \\
&= \int_0^1 -\big[2(1-y) + y\big]\, dy + \big[3y + 4(1-y)\big]\, dy \\
&= \int_0^1 (-2 + 2y - y + 3y + 4 - 4y)\, dy \\
&= \int_0^1 2\, dy \Big[2y\Big]_0^1 = 2\,.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\displaystyle\int_{B\mathcal{O}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathcal{O}B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $\mathcal{O}B : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1$, portanto, $dx = 0$. Então

$$\int_{B\mathcal{O}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathcal{O}B} Q(0,y)\ dy = -\int_0^1 (3y+0)\ dy = -\left[\tfrac{3y^2}{2}\right]_0^1 = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Somando, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 + 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Por outro lado,

$$\iint_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\ dxdy = \iint_D (4-1)\ dxdy = 3A(D) = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{3}{2}\,.$$

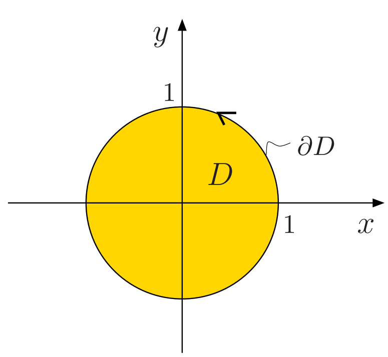
Exemplo 2

Seja $\vec{F}(x,y) = -x^2y\,\vec{\mathbf{i}} + xy^2\,\vec{\mathbf{j}}$ e D o disco de centro $(0,0)$ e raio 1. Calculemos $\displaystyle\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para ∂D orientada no sentido anti-horário.

Solução:

Do Teorema de Green, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\ dxdy = \iint_D \left(y^2 + x^2\right)\ dxdy\,.$$



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy = & r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}$$

e $D_{r\theta}$ é dado por

$$D_{r\theta}:\begin{cases}0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$$

Então

$$\oint\limits_{\partial D^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{D_{r\theta}}r^2\cdot r\ drd\theta=\int_{D_{r\theta}}r^3\ drd\theta=\int_0^1 r^3\int_0^{2\pi}\ d\theta dr=2\pi\int_0^1 r^3\ dr=2\pi\left[\tfrac{r^4}{4}\right]_0^1=\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Exemplo 3

Seja $\overrightarrow{F}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ definido em $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Calculemos:

a) $\oint\limits_{C_1^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, sendo $C_1: x^2+y^2=a^2$, $a>0$;

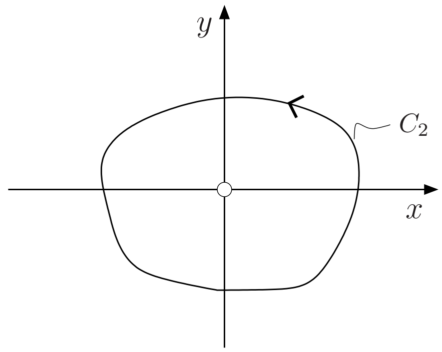
b) $\oint\limits_{C_2^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, sendo C_2 uma curva fechada, C^1 por partes, que envolve a origem.

Solução:

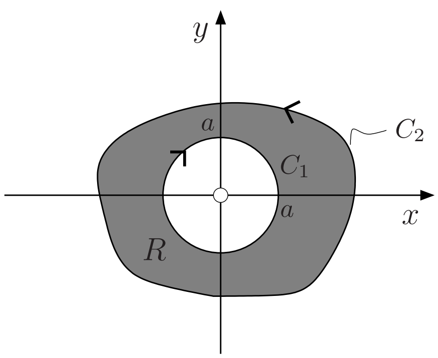
a) Observemos que a região limitada por C_1 não está contida em D, pois $(0,0)\notin D$. Então não podemos aplicar o Teorema de Green. Sendo assim, usaremos a definição. Parametrizando C_1, temos $x=a\cos t$ e $y=a\,\mathrm{sen}\,t$, com $0\leq t\leq 2\pi$, portanto, $dx=-a\,\mathrm{sen}\,t\ dt$ e $dy=a\cos t\ dt$. Então

$$\begin{aligned}\oint\limits_{C_1^+}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\oint\limits_{C_1^+}\tfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\tfrac{x}{x^2+y^2}\,dy\ &=\ \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{a^2}(-a\,\mathrm{sen}\,t)+\tfrac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\right]\,dt\\ &=\ \int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}^2\,t+\cos^2 t)\ dt\\ &=\ \int_0^{2\pi}dt\\ &=\ 2\pi\,.\end{aligned}$$

b)



Aqui também não podemos aplicar o Teorema de Green, pois $(0,0)$ está na região limitada por C_2 e $(0,0) \notin D$. Usar a definição é impossível pois nem conhecemos uma equação de C_2. Então, o que fazer?



A ideia é isolar $(0,0)$ por uma circunferência $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$, com o raio a adequado de modo que C_1 esteja no interior da região limitada por C_2, orientada no sentido horário.

Seja R a região limitada por C_1 e C_2. Logo, $\partial R = C_2 \cup C_1$. Como R não contém $(0,0)$, então podemos aplicar o Teorema de Green em R. Temos

$$\oint_{\partial R^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy\,.$$

Como $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$ (Verifique!) então $\displaystyle\oint_{\partial R^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$. Logo, $\displaystyle\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \oint_{C_1^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.

Portanto, $\displaystyle\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \oint_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ ou $\displaystyle\oint_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi$ por (a).

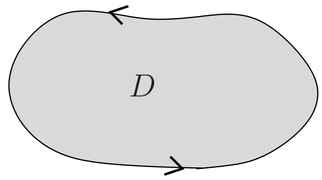
Exemplo 4

a) Se D é uma região plana qualquer à qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área de D é dada por $\displaystyle A(D) = \oint_{\partial D^+} -y\,dx$ ou $\displaystyle A(D) = \oint_{\partial D^+} x\,dy$ ou $\displaystyle A(D) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$.

b) Aplique uma das fórmulas acima para mostrar que a área limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é πab.

Solução:

a)



Pelo Teorema de Green, tem-se

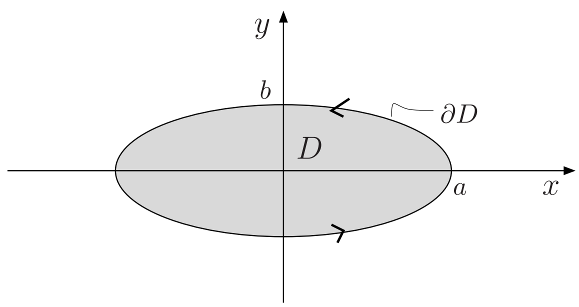
$$\oint_{\partial D^+} -y\,dx = \oint_{\partial D^+} -y\,dx + 0\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy \;=\; \iint_D (0+1)\,dxdy$$

$$= \iint_D dxdy$$

$$= A(D)\,.$$

Logo, $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y\,dx$. Analogamente, prova-se as outras fórmulas.

b) O esboço de D é:



A área de D é dada por $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y\;dx$ onde ∂D é parametrizada por

$$\begin{cases} \gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t) \\ \gamma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t) \end{cases} ,0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Então

$$A(D) = \int_0^{2\pi} (-b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t)\;dt \;=\; \int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{sen}^2\,t\,dt$$

$$= ab\cdot\tfrac{1}{2}\left[t - \tfrac{\mathrm{sen}\,2t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= ab\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$= \pi ab \;\; \text{u.a.}$$

O Teorema da Divergência

Teorema: Seja D uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas, (isto é, ∂D está orientada positivamente). Seja $F = P(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$ e $\overrightarrow{n}$ o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D. Então

$$\oint_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \iint_D \text{div}\, \overrightarrow{F}\, dxdy\,.$$

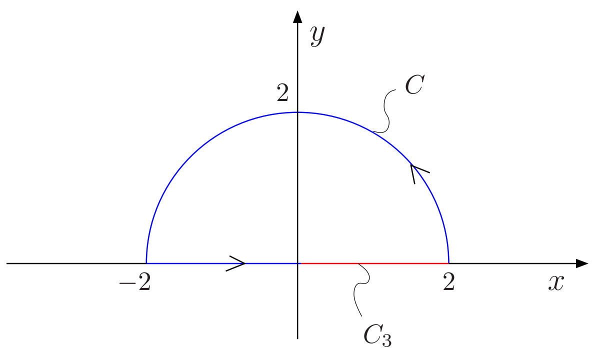
Observação: O teorema acima é uma forma vetorial do Teorema de Green. Para obtê-lo, basta aplicar o teorema de Green ao campo $G = -Q(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + P(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

Exemplo 5

Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$ onde $\overrightarrow{F}(x,y) = (x + 2xy + e^{y^2}, x - y)$ e $C = C_1 \cup C_2$, com C_1 o semicírculo de raio 2 centrado na origem e contido no semiplano $y \geq 0$ percorrida no sentido trigonométrico, C_2 o segmento de reta que une os pontos $(-2,0)$ a $(0,0)$ e $\overrightarrow{n}$ o vetor normal à curva C que aponta sempre para o exterior do semidisco $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$.

Solução:

Vamos usar o teorema da divergência no semidisco $D = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ com bordo $\partial D = C \cup C_3$ onde C_3 é o segmento de reta que une a origem ao ponto $(2,0)$. Assim,



$$\iint_D \text{div}\, \overrightarrow{F}\, dxdy = \oint_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$$

Mas $\text{div}\, \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x + 2xy + e^{y^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}(x - y) = 1 + 2y - 1 = 2y$. Além disso, o vetor normal unitário exterior a D na curva C_3 é $(0,-1)$. Portanto, em C_3, $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{F}(x,0) \cdot (0,-1) = -x$ e logo,

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,ds &= \iint_D 2y\,dxdy - \int_{C_3} -x\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^2 2r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta + \int_0^2 x\,dx\\ &= \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{32}{3}+2\end{aligned}$$

Aula 18 – Teorema das Quatro Equivalências

Objetivo

- Estudar condições sobre o domínio de $\overrightarrow{F}$ para que valha a recíproca do Teorema 1, da aula 16, isto é, em que domínios, campos de rotacional nulo são conservativos?

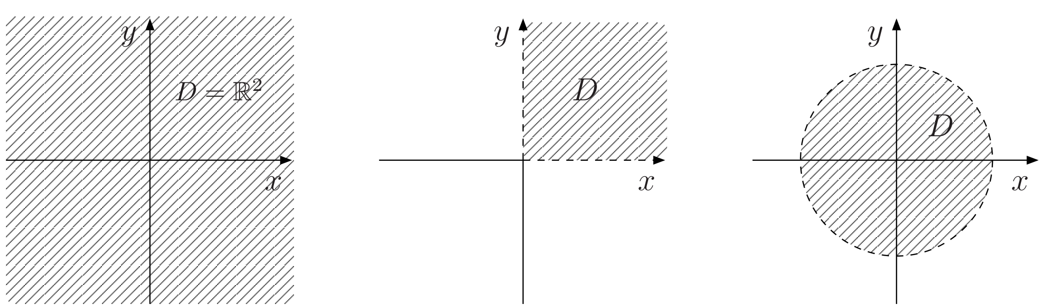
Condições sobre D

(i) D é aberto.

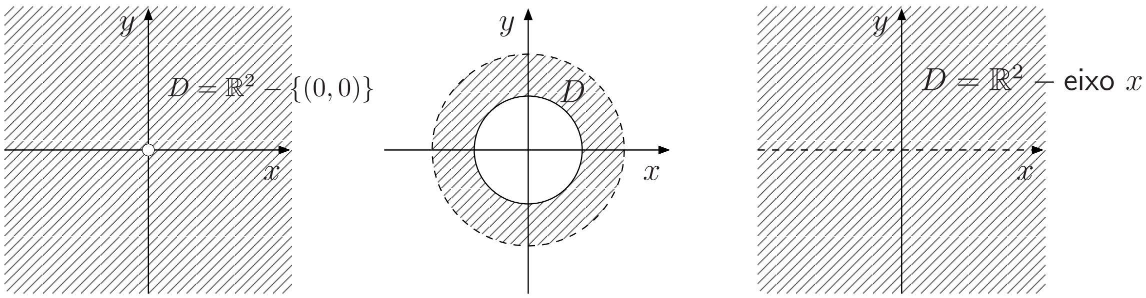
(ii) D é conexo (isto é, dois pontos quaisquer de D podem ser ligados por uma curva contida em D).

(iii) D é "sem buracos" (isto é, qualquer curva fechada de D delimita uma região inteiramente contida em D).

Um conjunto satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) é dito um conjunto **simplesmente conexo**. A seguir daremos exemplos de conjuntos simplesmente conexos.



Agora, daremos exemplos de conjuntos não simplesmente conexos.



OBS.: Seja $D \subset \mathbb{R}^3$. Dizemos que D é um conjunto simplesmente conexo se D é aberto, conexo e "sem buracos" (no sentido de que qualquer curva fechada de D delimita uma superfície inteiramente contida em D).

Exemplo 1

O $\mathbb{R}^3$, uma bola aberta em $\mathbb{R}^3$, o $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ são conjuntos simplesmente conexos. O $\mathbb{R}^3$ sem uma reta não é simplesmente conexo.

Teorema 1: Seja $\overrightarrow{F}$ um campo de classe C^1 em um domínio D de $\mathbb{R}^2$, simplesmente conexo. Se $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ então $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

Demonstração

O fato de que D é um conjunto simplesmente conexo e $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ segue do Teorema de Green que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para todo caminho fechado de D. Daí mostramos que $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende do caminho. Em seguida, mostra-se que $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

■

Do Teorema 1 e de teoremas da aula 16, enunciamos um teorema contendo quatro equivalências.

Teorema das quatro equivalências: Seja $\overrightarrow{F} = (P,Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 em D. Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ em D.

b) $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ qualquer que seja a curva fechada C de D.

c) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende do caminho C de D.

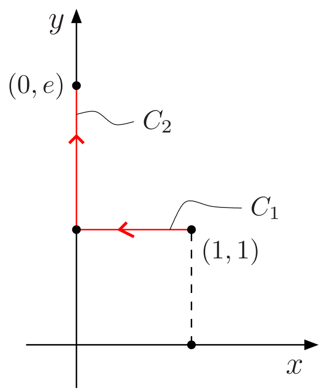
d) $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

Exemplo 2

Considere a curva C dada por $\sigma(t) = \left(-\cos\frac{\pi}{t}, e^{t-1}\right)$, $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y) = (-y^2 \operatorname{sen} x, 2y\cos x)$.

Solução:

Como $\overrightarrow{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (que é um conjunto simplesmente conexo) e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\operatorname{sen} x = \frac{\partial P}{\partial y}$, então pelo teorema das quatro equivalências, segue que $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende do caminho que liga $\sigma(1) = (1,1)$ e $\sigma(2) = (0,e)$. Então considere $C = C_1 \cup C_2$, onde $C_1^- : y = 1$, $0 \leq x \leq 1$, portanto, $dy = 0$ e $C_2 : x = 0$, $1 \leq y \leq e$, portanto $dx = 0$.



Temos

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_1^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C_1^-} P(x,1)\,dx = -\int_0^1 (-\operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen} x\;dx = -\cos x\Big|_0^1 = 1 - \cos 1\,.$$

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} Q(0,y)\;dy = \int_1^e 2y\cos 0\;dy = \int_1^e 2y\;dy = y^2\Big|_1^e = e^2 - 1\,.$$

Logo,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 1 - \cos 1 + e^2 - 1 = e^2 - \cos 1\,.$$

Uma solução alternativa

Pelo teorema das quatro equivalências segue que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Logo, existe $\varphi(x,y)$ definido em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -y^2 \operatorname{sen} x \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y\cos x \tag{2}$$

Integrando (1) e (2) em relação a x e y respectivamente, temos

$$\varphi(x,y) = y^2 \cos x + f(y)$$

$$\varphi(x,y) = y^2 \cos x + g(x)$$

Tomando $f(y) = 0$ e $g(x) = 0$, temos que $\varphi(x,y) = y^2 \cos x$ é uma função potencial de $\overrightarrow{F}$. Logo,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi\left(\sigma(2)\right) - \varphi\left(\sigma(1)\right) = \varphi(0,e) - \varphi(1,1) = e^2 \cos 0 - 1^2 \cos 1 = e^2 - \cos 1\,.$$

Exemplo 3

Considere a integral de linha $\displaystyle\int_C (kxe^y + y)\, dx + (x^2 e^y + x - ky)\, dy$.

a) Determine a constante k para que esta integral seja independente do caminho.
b) Calcule o valor da integral de $A = (0,0)$ a $B = (1,1)$ para o valor de k encontrado em (a).

Solução:

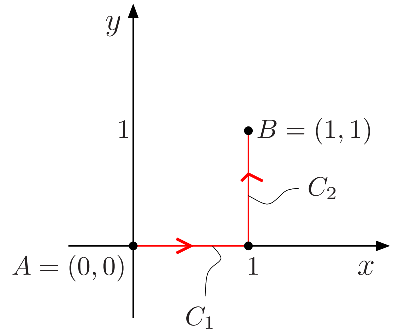
a) O campo $\overrightarrow{F}$ é definido em $\mathbb{R}^2$ que é um conjunto simplesmente conexo. Pelo teorema das quatro equivalências é necessário que $rot\ \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ para que a integral independa do caminho. Então

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2xe^y + 1 = kxe^y + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2xe^y = kxe^y \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = kx \text{ pois } e^y \neq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad k = 2\,.
\end{aligned}$$

Portanto, para $k = 2$ segue que rot$\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, logo, pelo teorema das equivalências temos que a integral independe do caminho.

b) Temos que

$$k = 2 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{F}(x,y) = (2xe^y + y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(x^2 e^y + x - 2y\right)\overrightarrow{\mathbf{j}}\,.$$



Como a integral independe do caminho, tomemos $C = C_1 \cup C_2$, onde $C_1 : y = 0$, com $0 \leq x \leq 1$ portanto $dy = 0$ e $C_2 : x = 1$, com $0 \leq y \leq 1$, logo, $dx = 0$. Temos

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} P(x,0)\,dx = \int_0^1 2xe^0\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} Q(1,y)\,dy = \int_0^1 (e^y + 1 - 2y)\;dy = \left[e^y + y - y^2\right]_0^1 = e - 1\,.$$

Somando temos,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 1 + e - 1 = e\,.$$

Uma solução alternativa

Também do teorema das equivalências resulta que $\overrightarrow{F}$ é conservativo, isto é, existe $\varphi(x,y)$ definido em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^y + y \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \tag{4}$$

Integrando (3) e (4) em relação a x e y respectivamente, temos

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + xy + f(y)$$

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2 + g(x)\,.$$

Devemos tomar $f(y) = -y^2$ e $g(x) = 0$. Assim, $\varphi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$ é uma função potencial de $\overrightarrow{F}$. Logo,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = e + 1 - 1 - 0 + 0 - 0 = e\,.$$

Exercício 1: Calcule a integral de linha diretamente e, também, pelo teorema de Green:

$$\oint_C x\;dx + y^2\;dy$$

onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $y = x$, no sentido anti-horário.

Exercício 2: Utilize o teorema de Green para calcular:

a) $I = \oint\limits_C -\dfrac{x^2y}{1+x^2}\,dx + \operatorname{arctg} x\ dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y=0$, $x=1$, $y=1$ e $x=0$, no sentido anti-horário;

b) $I = \oint\limits_C e^x \operatorname{sen} y\ dx + (x + e^x \cos y)\,dy$, onde C é a elipse $3x^2+8y^2=24$, no sentido anti--horário;

c) $I = \oint\limits_C 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dx + \left(\ln\left(x^2+y^2\right)+x\right)dy$, onde C é parametrizada por $x = 4+2\cos t$ e $y = 4+\operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercício 3: O teorema de Green pode ser utilizado para calcular a integral de linha

$$\oint\limits_C \frac{-y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

a) onde C é a circunferência $x^2+y^2=1$, orientada no sentido anti-horário?

b) onde C é o triângulo com vértices $(1,0)$, $(1,2)$ e $(2,2)$, orientado no sentido anti-horário?

c) Qual é o valor da integral de linha onde C é o triângulo da parte (b)?

Exercício 4: Use uma integral de linha para calcular a área da região plana limitada pelas curvas $y=x^2$ e $x=y^2$.

Exercício 5: Uma partícula move-se ao longo da circunferência $y=\sqrt{4-x^2}$ do ponto $(2,0)$ até $(-2,0)$. Determine o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força a seguir:

$$\vec{F}(x,y) = \left(x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2}\right)\ .$$

Exercício 6: Mostre que

$$I = \int_{(0,1)}^{(2,3)} \left(2x+y^3\right)dx + \left(3xy^2+4\right)dy$$

é independente do caminho e calcule-a.

Exercício 7:

a) Mostre que $I = \int\limits_C \left(x+3y+y^{10}\right)dx + \left(3x+10xy^9+\ln\left(1+y^2\right)\right)dy$ é independente do caminho.

b) Calcule a integral I para $C : (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, com $y \geq 0$, no sentido horário.

Exercício 8: Mostre que

$$I = \int_C (1 + 2xy + \ln x)\ dx + x^2\ dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de I, onde C é dada por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.