Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

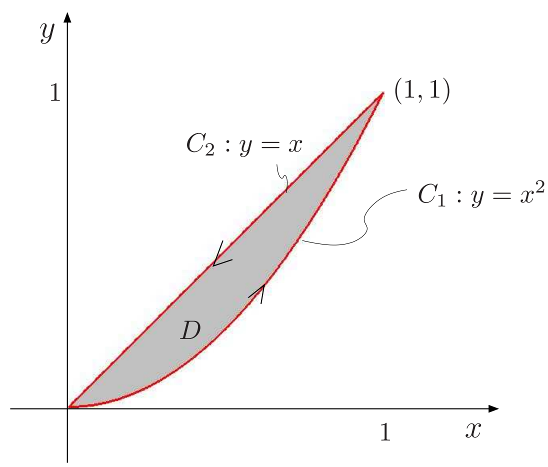
Cálculo III-A – Módulo 9– Tutor

Exercício 1: Calcule a integral de linha diretamente e, também, pelo teorema de Green:

$$\oint_C x\ dx + y^2\ dy$$

onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $y = x$, no sentido anti-horário.

Solução: O esboço de $C = C_1 \cup C_2$ está representado na figura que se segue.



Cálculo direto

Temos que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{F}(x, y) = (x, y^2)$. Temos que $C_1 : \gamma(t) = (t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $\gamma'(t) = (1, 2t)$. Assim:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^1 \vec{F}\left(t, t^2\right) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^1 \left(t, t^4\right) \cdot (1, 2t)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t + 2t^5\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\,.$$

Também, temos que $C_2 : \gamma(t) = (1-t, 1-t)$, com $0 \leq t \leq 1$, portanto, $\gamma'(t) = (-1,-1)$. Então,

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_0^1 \vec{F}(1-t, 1-t) \cdot (-1,-1)\ dt =$$

$$= \int_0^1 \left(1-t, (1-t)^2\right) \cdot (-1,-1)\ dt = \int_0^1 \left(-1+t-1+2t-t^2\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-2+3t-t^2\right) dt = \left[-2t + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}\,.$$

Logo,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0\,.$$

Cálculo por teorema de Green

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (0-0)\ dxdy = \iint_D 0\ dxdy = 0$$

onde D é a região compacta do plano limitada por C.

Atenção: Prezado aluno, você reparou na simplicidade do cálculo da integral pelo teorema de Green?

Exercício 2: Utilize o teorema de Green para calcular:

a) $I = \oint_C -\dfrac{x^2 y}{1+x^2}\,dx + \operatorname{arctg} x\ dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y=0$, $x=1$, $y=1$ e $x=0$, no sentido anti-horário;

b) $I = \oint_C e^x \operatorname{sen} y\ dx + (x + e^x \cos y)\,dy$, onde C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$, no sentido anti--horário;

c) $I = \oint_C 2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\,dx + \left(\ln\left(x^2+y^2\right) + x\right) dy$, onde C é parametrizada por $x = 4 + 2\cos t$ e $y = 4 + \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

a) O esboço da região D está representado na figura que se segue.

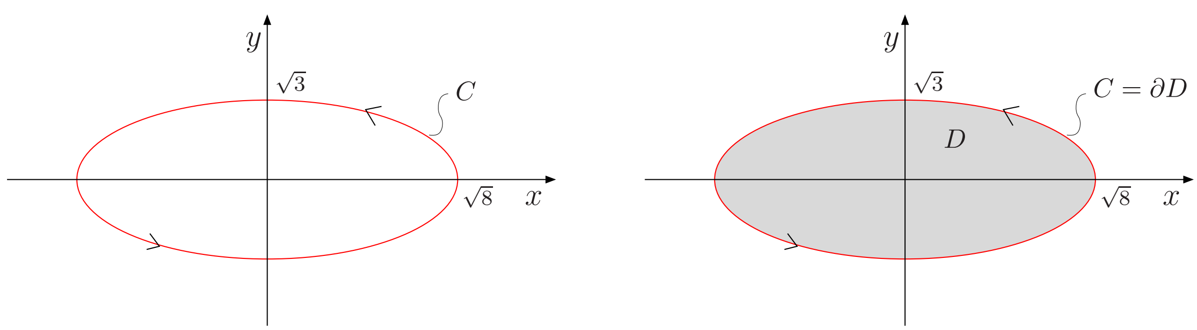
Seja D a região compacta de $\mathbb{R}^2$, limitada por C. Como $\partial D = C$ está orientada positivamente e $\vec{F}(x,y) = \Big(\underbrace{-\frac{x^2y}{1+x^2}}_{P}, \underbrace{\text{arctg}\, x}_{Q}\Big)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, então podemos aplicar o teorema de Green.

Temos que:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left[\frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right] dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{1+x^2}{1+x^2}\, dxdy = \iint_D dxdy = A(D) = 1^2 = 1\,.$$

b) O esboço de $C : \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ está representado na figura a seguir.



Seja D a região compacta de $\mathbb{R}^2$, limitada por C. Como $C = \partial D$ está orientada positivamente e $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (e^x \operatorname{sen} y, x + e^x \cos y)$ é de classe C^1 no aberto $\mathbb{R}^2$, então pelo teorema de Green segue que

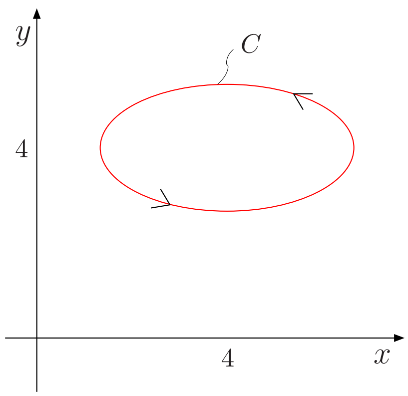
$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1 + e^x \cos y - e^x \cos y)\, dxdy =$$

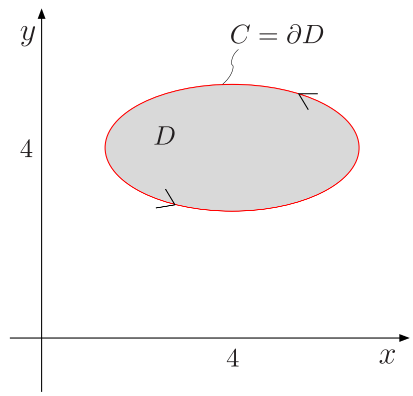
$$= \iint_D dxdy = A(D) = \pi ab$$

com $a = \sqrt{8}$ e $b = \sqrt{3}$. Então,

$$I = 2\sqrt{6}\pi\,.$$

c) De $x = 4 + 2\,\text{sen}\,t$ e $y = 4 + \text{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ temos $\left(\dfrac{x-4}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = 1$. Logo, C é uma elipse fechada, pois $0 \leq t \leq 2\pi$, cujo esboço está representado na figura que se segue.





Seja D a região compacta limitada por C. Como $C = \partial D$ está orientada positivamente e $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = \left(2\,\text{arctg}\,\frac{y}{x}\,,\ln\left(x^2+y^2\right)+x\right)$ é de classe C^1 no conjunto aberto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ e $D \subset U$ então podemos aplicar o teorema de Green. Temos, então,:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1 - \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1 - \frac{2x}{x^2+y^2}\right) dxdy = \iint_D dxdy = A(D) = \pi ab$$

com $a = 2$ e $b = 1$. Logo, $I = 2\pi$.

Exercício 3: O teorema de Green pode ser utilizado para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

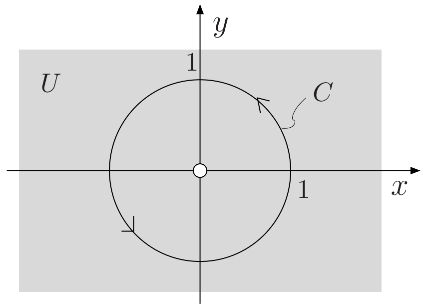
a) onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário?

b) onde C é o triângulo com vértices $(1,0)$, $(1,2)$ e $(2,2)$, orientado no sentido anti-horário?

c) Qual é o valor da integral de linha onde C é o triângulo da parte (b)?

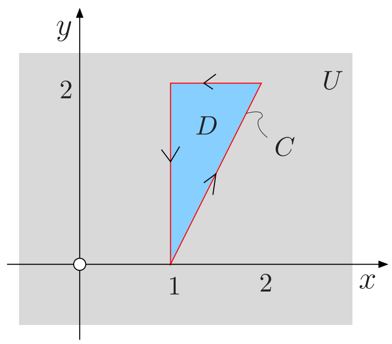
Solução:

a) O campo $\vec{F} = (P,Q) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ é de classe C^1 no conjunto aberto $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.



Como a região compacta D, limitada por C, contem a origem $(0,0)$, então D não está contida em U. Assim, não podemos aplicar o teorema de Green na região D.

b) O esboço do triângulo C está representado na figura que se segue.



Como a região compacta D, limitada por C, está contida em U, pois não contém $(0,0)$, então podemos aplicar o teorema de Green.

c) Pelo teorema de Green temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

onde

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

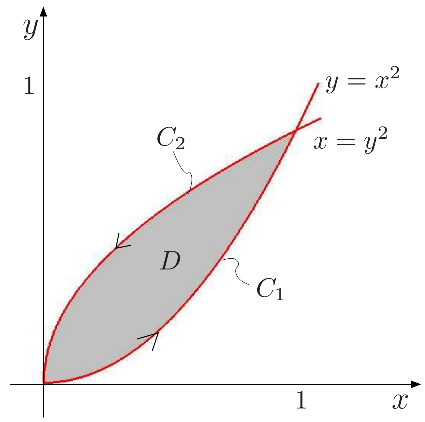
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\,.$$

Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D 0 \; dxdy = 0\,.$$

Exercício 4: Use uma integral de linha para calcular a área da região plana limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Solução: As interseções são $(0,0)$ e $(1,1)$. Então, o esboço da região está representado na figura a seguir.



Temos que $A(D) = \int_{\partial D^+} x\ dy$ onde $\partial D = C_1 \cup C_2$ com $C_1 : \gamma(t) = (t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\gamma'(t) = (1, 2t)$ e $C_2 : \gamma(t) = ((1-t)^2, 1-t)$, com $0 \leq t \leq 1$ logo $\gamma'(t) = (-2(1-t), -1)$.

Atenção!

Aqui, usei a seguinte parametrização: $\gamma(t) = ((a+b-t)^2, a+b-t)$, com $0 \leq t \leq 1$ e com $a = 0$ e $b = 1$. Também poderia ter parametrizado C_2^- (C_2 percorrida no sentido contrário), $C_2^- : \gamma(t) = (t^2, t)$, com $0 \leq t \leq 1$ e usar a propriedade

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Voltando à solução temos:

$$A(D) = \int_{C_1} x\ dy + \int_{C_2} x\ dy$$

onde

$$\int_{C_1} x\ dy = \int_{C_1} 0\ dx + x\ dy = \int_0^1 \vec{F}\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 2t)\ dt =$$

$$= \int_0^1 2t^2\ dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

e

$$\int_{C_2} x\ dy = \int_{C_2} 0\ dx + x\ dy = \int_0^1 \vec{F}\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^1 \left(0, (1-t)^2\right) \cdot (-2(1-t), -1)\ dt = \int_0^1 -(1-t)^2\ dt = \left.\frac{(1-t)^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}(0-1) = -\frac{1}{3}\,.$$

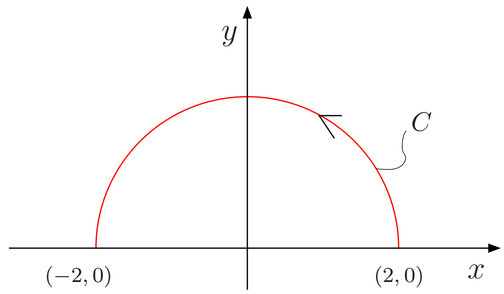
Então,

$$A(D) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

Exercício 5: Uma partícula move-se ao longo da circunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ do ponto $(2, 0)$ até $(-2, 0)$. Determine o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força a seguir:

$$\vec{F}(x, y) = \left(x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2}\right) .$$

Solução: O esboço de C está representado na figura que se segue.

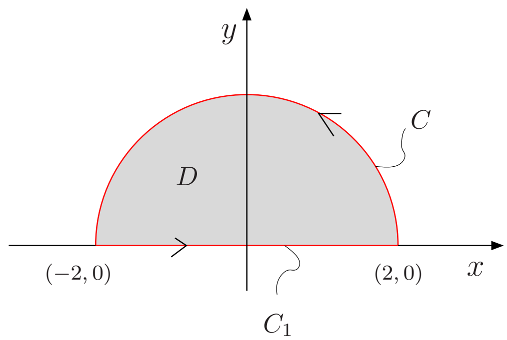


O trabalho realizado pelo campo $\vec{F} = (P, Q) = \left(x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2}\right)$ ao longo de C é dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 2ye^{y^2} - 2ye^{y^2} = 3x^2 + 3y^2 \neq 0$$

então $\vec{F}$ não é conservativo. Para calcular diretamente a integral é complicado, devido à complexidade do campo. Então, consideremos a curva fechada $\overline{C} = C \cup C_1$, onde C_1 é o segmento de reta que liga $(-2, 0)$ a $(2, 0)$ e apliquemos o teorema de Green.



Seja D a região compacta limitada por $\overline{C}$. Como $\overline{C} = \partial D$ está orientada positivamente e $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ temos, pelo teorema de Green, que:

$$\oint_{\overline{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left(3x^2 + 3y^2\right) dxdy .$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_D \left(3x^2+3y^2\right)dxdy$

Passando para coordenadas polares temos $x^2+y^2=r^2$, $dxdy=rdrd\theta$ e $D_{r\theta}:\left\{\begin{array}{l}0\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq r\leq 2\end{array}\right.$.
Logo,

$$\iint\limits_D \left(3x^2+3y^2\right)dxdy = 3\iint\limits_D r^2\cdot r\ drd\theta = 3\int_0^\pi\int_0^2 r^3\ drd\theta =$$

$$= 3\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 12\int_0^\pi d\theta = 12\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Temos que $C_1:\gamma(t)=(t,0)$, com $-2\leq t\leq 2$, portanto, $\gamma'(t)=(1,0)$. Então,

$$\int\limits_{C_1}\vec{F}\cdot\vec{r} = \int_{-2}^2 \vec{F}\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\ dt = \int_{-2}^2 \vec{F}(t,0)\cdot(1,0)\ dt =$$

$$= \int_{-2}^2 \left(t+1,t^3+0+0\right)\cdot(1,0)\ dt = \int_{-2}^2 (t+1)\ dt = \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-2}^2 =$$

$$= (2+2)-(2-2) = 4\,.$$

Assim:

$$W=\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 12\pi-4\ \textit{u.w.}$$

Exercício 6: Mostre que

$$I=\int_{(0,1)}^{(2,3)} \left(2x+y^3\right)dx+\left(3xy^2+4\right)dy$$

é independente do caminho e calcule-a.

Solução: Seja $\vec{F}(x,y)=\left(2x+y^3\right)\ dx+\left(3xy^2+4\right)$ que é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=3y^2$, então, pelo teorema das equivalências, segue que a integral I não depende do caminho que liga $(0,1)$ a $(2,3)$. Também, pelo teorema das equivalências, temos que $\vec{F}$ é um campo conservativo, isto é, existe uma função potencial $\varphi(x,y)$ tal que $\nabla\varphi=\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, portanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x+y^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=3xy^2+4 \quad (2)$$

Integrando (1) e (2) em relação a x e y, respectivamente, temos:

$$\varphi(x,y) = x^2 + xy^3 + f(y)$$

$$\varphi(x,y) = xy^3 + 4y + g(x)$$

Tomando $f(y) = 4y$ e $g(x) = x^2$ temos que:

$$\varphi(x,y) = x^2 + xy^3 + 4y\,.$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

$$I = \varphi(2,3) - \varphi(0,1) = (2^2 + 2\cdot 3^3 + 4\cdot 3) - (0+0+4) = 66\,.$$

Exercício 7:

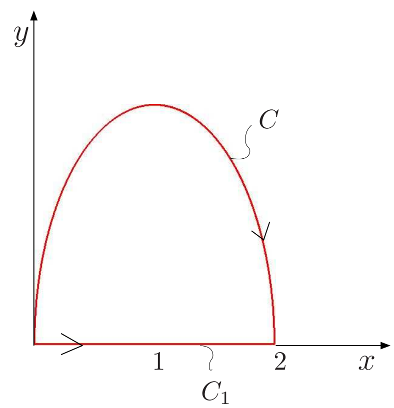
a) Mostre que $I = \displaystyle\int_C \left(x + 3y + y^{10}\right) dx + \left(3x + 10xy^9 + \ln\left(1+y^2\right)\right) dy$ é independente do caminho.

b) Calcule a integral I para $C : (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, com $y \geq 0$, no sentido horário.

Solução:

a) Seja $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = \left(x + 3y + y^{10}, 3x + 10xy^9 + \ln\left(1+y^2\right)\right)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3 + 10y^9 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ então, pelo teorema das equivalências, segue que a integral de linha I é independente do caminho.

b) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como a integral I não depende da curva que liga $(0,0)$ a $(2,0)$, então consideremos outra curva no lugar de C. Seja, então, o segmento de reta C_1 ligando $(0,0)$ a $(2,0)$. Temos $C_1 : \begin{cases} x = t \\ t = 0 \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2$, portanto, $dx = dt$ e $dy = 0$. Então,

$$I = \int_{C_1} \left(x + 3y + y^{10}\right) dx + \left[3x + 10xy^9 \ln\left(1+y^2\right)\right] dy =$$

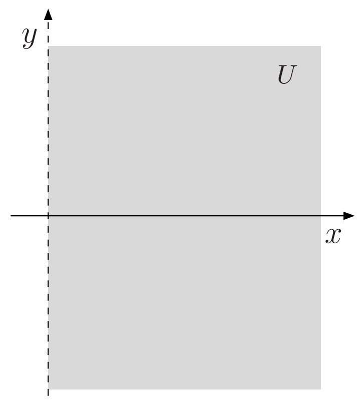
$$= \int_0^2 (t + 0 + 0)dt = \int_0^2 t\; dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2\,.$$

Exercício 8: Mostre que

$$I = \int_C (1 + 2xy + \ln x)\ dx + x^2\ dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de I, onde C é dada por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

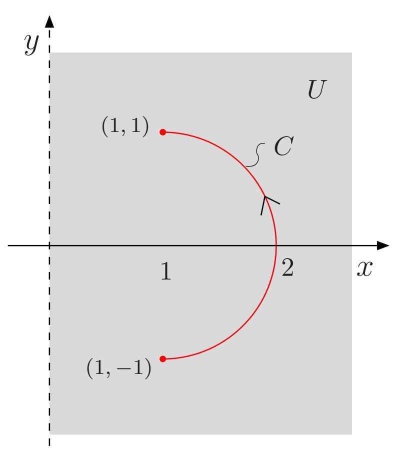
Solução: Seja $\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (1 + 2xy + \ln x, x^2)$ que é de classe C^1 no conjunto aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.



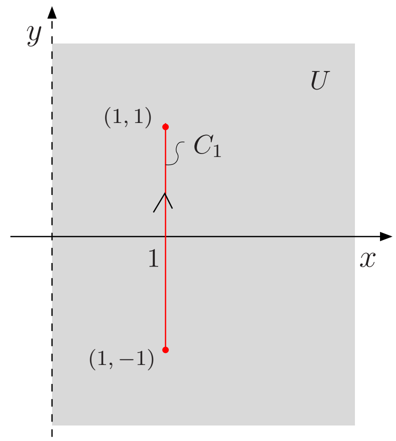
Como U é um conjunto simplesmente conexo e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, então, pelo teorema das equivalências, segue que a integral de linha I é independente do caminho.

Esboço de C

Temos que $\gamma(-\pi/2) = (1, -1)$ e $\gamma(\pi/2) = (1, 1)$. As equações de C são $x = 1 + \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Logo, $(x - 1)^2 = \cos^2 t$ e $y^2 = \operatorname{sen}^2 t$, portanto, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Então C é o arco da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, percorrido no sentido anti-horário que vai de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.



Como a integral de linha não depende do caminho então vamos substituir a curva C pelo segmento de reta C_1 que liga $(1, -1)$ a $(1, 1)$.



Temos $C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$, com $-1 \leq t \leq 1$, portanto, $dx = 0$ e $dy = dt$. Então,

$$I = \int_{C_1} (1 + 2xy + \ln x)\ dx + x^2\ dy = \int_{-1}^{1} 0 + 1^1\ dt = \int_{-1}^{1} dt = \big[t\big]_{-1}^{1} = 2\,.$$