Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 10

Aula 19 – Superfícies Parametrizadas

Objetivo

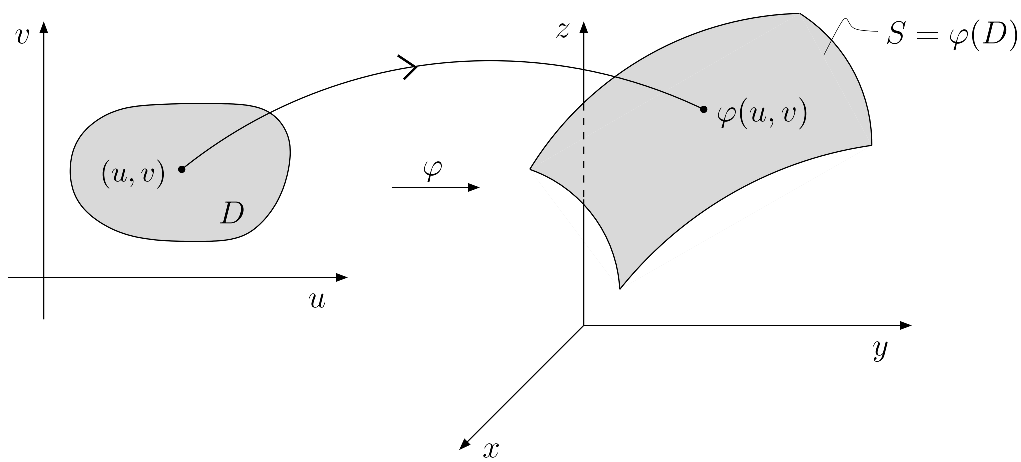
- Estudar as superfícies parametrizadas, visando as integrais de superfície.

Superfícies parametrizadas

Definição: Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada se existir uma função vetorial contínua

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \end{array}$$

tal que $S = \varphi(D)$.

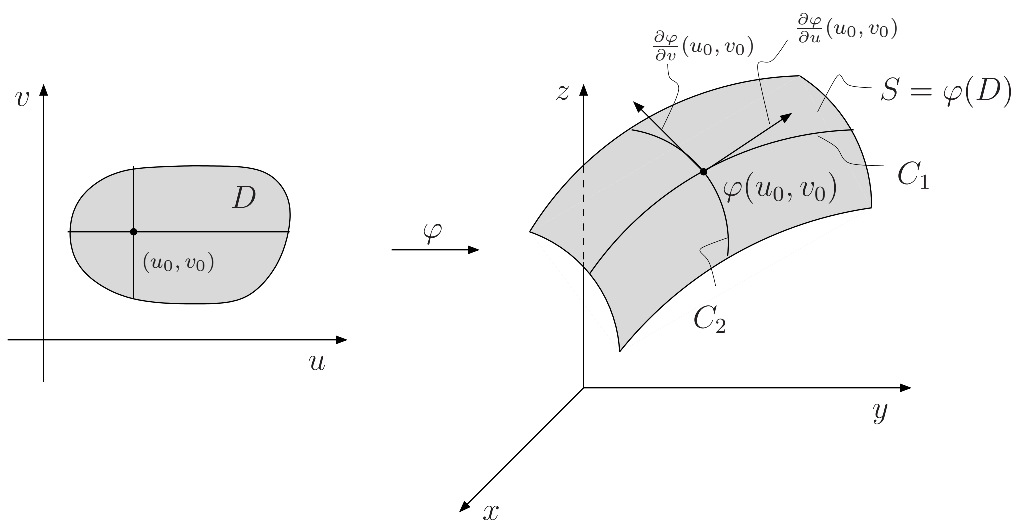


As funções $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ são chamadas equações paramétricas de S.

Se φ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva diferenciável

$$C_1 : \gamma(u) = \varphi(u, v_0) = \big(x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)\big)$$

(Veja a figura a seguir).



Se

$$\gamma'(u_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,,\,\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,,\,\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right) \neq \overrightarrow{0},$$

segue que $\varphi_u(u_0, v_0)$ é um vetor tangente a C_1 em $\varphi(u_0, v_0)$.

Analogamente, se

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,,\,\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,,\,\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right) \neq \overrightarrow{0},$$

então este vetor é um vetor tangente a C_2 em $\varphi(u_0, v_0)$.

Se o vetor

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0) \neq \overrightarrow{0},$$

então $\overrightarrow{N}$ é um vetor normal a S em $\varphi(u_0, v_0)$. O vetor $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$ é um vetor normal unitário a S em $\varphi(u_0, v_0)$.

Dizemos que S é regular em $\varphi(u_0, v_0)$ se $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) \neq \overrightarrow{0}$. O plano tangente a S em $\varphi(u_0, v_0)$ é dado por

$$\big[(x, y, z) - \varphi(u_0, v_0)\big] \cdot \overrightarrow{N}(u_0, v_0) = 0\,.$$

Apresentaremos, agora, parametrizações das principais superfícies.

1) Plano S

Sejam $P_0 \in S$, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ não paralelos contido no plano S. Seja $P \in S$. Então, existem escalares u e v, tais que

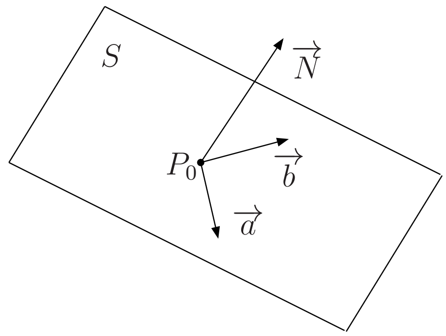
$$\overrightarrow{P_0P} = u\,\overrightarrow{a} + v\,\overrightarrow{b} \Leftrightarrow P = P_0 + u\,\overrightarrow{a} + v\,\overrightarrow{b}\,.$$

Então, uma parametrização de S é dada por

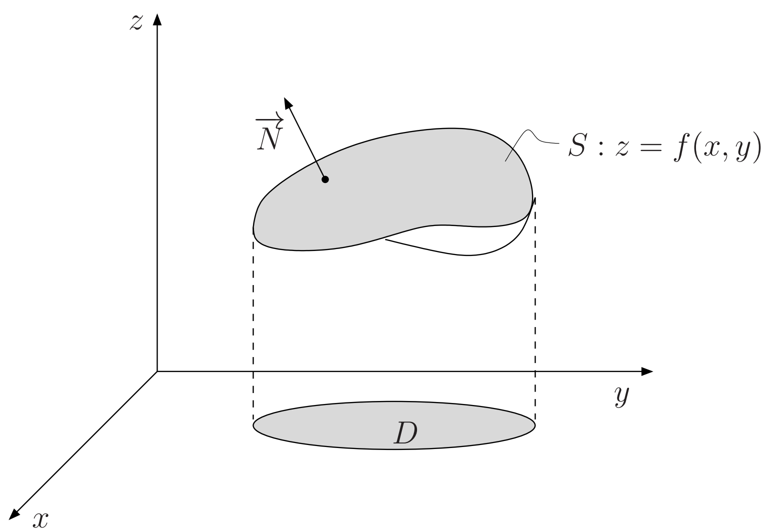
$$\varphi(u, v) = P_0 + u\,\overrightarrow{a} + v\,\overrightarrow{b} \;\; \textit{com} \;\; (u, v) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Da Geometria Analítica, vemos que um vetor normal a S em P_0 é:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\ .$$



2) S = gráfico de $z = f(x,y)$, com $(x,y) \in D$ e $f(x,y)$ de classe C^1



Uma parametrização natural (ou canônica) de $S = G_f$ (gráfico de f) é dada por

$$\varphi(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)\ , \ \ \textit{com}\ \ (x,y) \in D\ .$$

Um vetor normal é dado por

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \varphi_x(x,y) \times \varphi_y(x,y) = \big(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\big).\ \textit{Verifique!}$$

Como $\overrightarrow{N}(x,y) \neq \overrightarrow{0}$, para todo $(x,y) \in D$, segue que $S = G_f$ é uma superfície regular.

3) Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$

Utilizamos as coordenadas cilíndricas para parametrizar um cilindro de raio a. Tem-se

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

Então, $\varphi(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, z)$ *com* $(\theta, z) \in D : 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ z \in \mathbb{R}$ é uma parametrização de S.

Verifique que $\overrightarrow{N} = \varphi_\theta(\theta, z) \times \varphi_z(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0)$. Logo, $\overrightarrow{N} = (x, y, 0)$ é um vetor normal exterior a S em cada $(x, y, z) \in S$, portanto $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,0)}{a}$ é o vetor unitário normal exterior a S.

4) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$

Utilizamos as coordenadas esféricas para parametrizar a esfera. Tem-se

$$\begin{cases} x = a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z = a\cos\phi \end{cases}$$

com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então,

$$\varphi(\phi, \theta) = (a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, a\cos\phi)$$

com

$$(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Verifique que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \left(a^2\,\text{sen}^2\,\phi\cos\theta, a^2\,\text{sen}^2\,\phi\,\text{sen}\,\theta, a^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\right) \\ \|\overrightarrow{N}\| &= a^2\,\text{sen}\,\phi\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{\varphi(\phi, \theta)}{a} = \frac{(x, y, z)}{a}\,,$$

isto é, $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$ é o vetor unitário normal exterior à esfera.

5) Superfície de revolução S

a) Seja C uma curva no plano yz dada por

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

com $a \leq t \leq b$ e $y(t) \geq 0$ em $[a, b]$.

Ao girar o ponto $\big(0, y(t), z(t)\big)$ ao redor do eixo z, na altura $z(t)$, obtemos uma circunferência de raio $y(t)$, parametrizada por

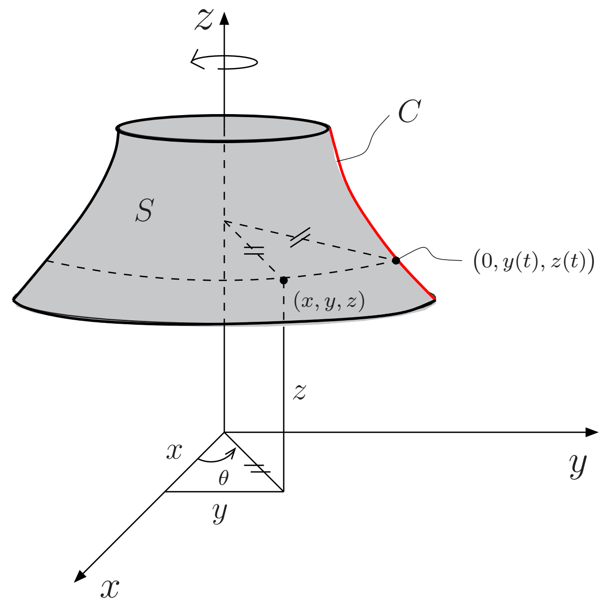
$$\big(y(t)\cos\theta, y(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big)\ ,$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Fazendo t variar de a até b, a circunferência começa a se deslocar segundo a altura $z = z(t)$, gerando a superfície de revolução S da figura ao lado. Tem-se

$$S : \varphi(t,\theta) = \big(y(t)\cos\theta, y(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big)$$

onde

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ . \end{cases}$$



Observe que na superfície S tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{raio de uma circunferência transversal} \\ z(t) &= \text{altura desta circunferência.} \end{aligned}$$

b) Se C é uma curva no plano xz dada por

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

com $a \leq t \leq b$, então:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{raio de uma circunferência transversal} \\ z(t) &= \text{altura dessa circunferência.} \end{aligned}$$

Logo, uma parametrização da superfície de revolução S, obtida girando C ao redor do eixo z, é

$$S : \varphi(t,\theta) = \big(x(t)\cos\theta, x(t)\operatorname{sen}\theta, z(t)\big)$$

com

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ . \end{cases}$$

Aula 20 – Área de Superfície

Objetivo

- Estudar as áreas de superfícies parametrizadas.

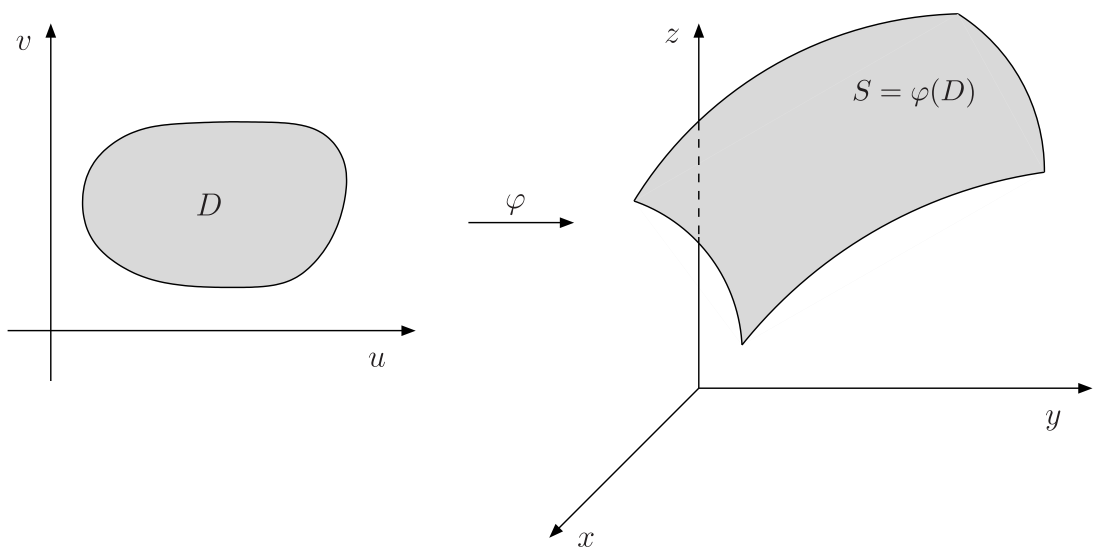
Área de superfície

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$ onde D é um conjunto compacto e φ de classe C^2 em um conjunto aberto contendo D. É necessário também que φ seja uma função injetora, exceto possivelmente na fronteira de D, e que S seja regular, exceto em um número finito de pontos.

Daqui por diante, até o final do curso, trabalharemos somente com superfícies descritas acima.

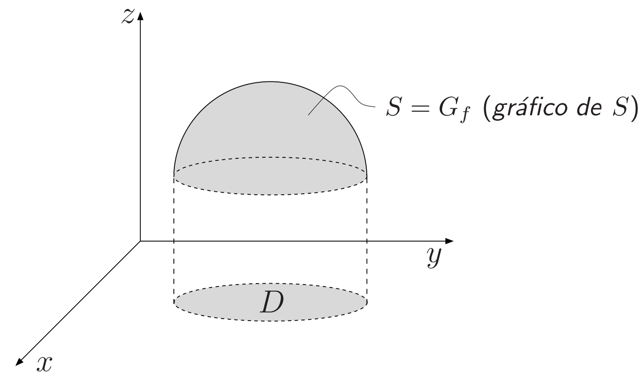
Definimos a área de S por

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \right\| \, dudv \,.$$



OBS.: Se S for o gráfico de uma função de classe C^1, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, onde D é um conjunto compacto que tem área, então

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy \,.$$



Exemplo 1

Mostre que a área da esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ é dada por $A(S) = 4\pi a^2$.

Solução:

Usando as coordenadas esféricas com $\rho = a$, para parametrizar a esfera, tem-se

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \operatorname{sen}\phi \cos\theta, a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, a\cos\phi)$$

com $(\phi, \theta) \in D : 0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculemos $\varphi_\phi \times \varphi_\theta\,(\phi,\theta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,(\phi,\theta)$ e seu módulo.

Tem-se $\varphi_\phi = (a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -a\operatorname{sen}\phi)$ e $\varphi_\theta = (-a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, a\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0)$, logo

$$\begin{aligned}
\varphi_\phi \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\phi \\ -a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \Big(a^2\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, a^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, \underbrace{a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\operatorname{sen}^2\theta}_{=a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}\Big) \\
&= a\operatorname{sen}\phi\,(a\operatorname{sen}\phi\cos\theta, a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, a\cos\phi) \\
&= (a\operatorname{sen}\phi)\cdot\varphi(\phi,\theta)\,.
\end{aligned}$$

Esta última expressão mostra que o vetor normal em cada ponto da esfera é radial, isto é, é um múltiplo do vetor posição $\varphi\,(\phi,\theta)$.

Tem-se $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\,(\phi,\theta)\| = |a\operatorname{sen}\phi|\,\|\varphi\,(\phi,\theta)\| = a^2\,|\operatorname{sen}\phi| = a^2\operatorname{sen}\phi$ pois $0 \leq \phi \leq \pi$, isto é, $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| = a^2\operatorname{sen}\phi$ (memorize este resultado). Como $A(S) = \displaystyle\iint_D \|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\|\,d\phi d\theta$, temos

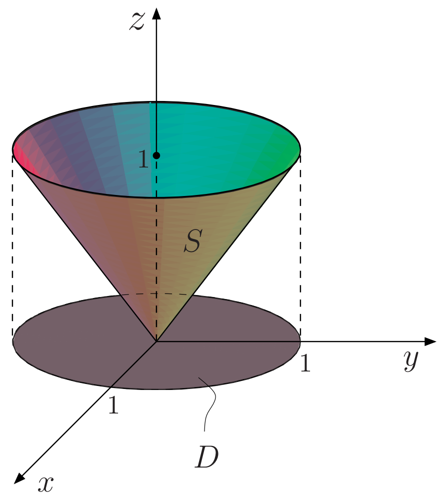
$$A(S) = \iint_D a^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi d\theta = a^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\theta d\phi = 2\pi a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\,d\phi = 2\pi a^2\big[-\cos\phi\big]_0^\pi = 4\pi a^2 \ \text{u.a.}$$

Exemplo 2

Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Solução:

O esboço da superfície S é:



Temos $S : z = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$, $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1$. Também temos $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo,

$$\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}\,.$$

Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy$$

temos

$$A(S) = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}\cdot A(D) = \sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \pi\sqrt{2} \text{ u.a.}$$

Exercício 1: Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (u, v, 1-v^2)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

a) Desenhe S.

b) Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi(1/2, 1/4)$.

c) Determine a área de S.

Exercício 2: Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 1\}$.

b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ z = \sqrt{3(x^2+y^2)},\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x+y+z=2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

d) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2=4,\ 0 \leq z \leq 2+\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}\right\}$.

e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2=2y,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$.

Exercício 3: Seja $C = \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2+(y-2)^2 = 1\right\}$. Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo z.

Exercício 4: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ em torno do eixo z.

a) Dê uma parametrização de S.

b) Calcule a área de S.

Exercício 5: Determine a área do paraboloide $z = 2\left(x^2+y^2\right)$, abaixo do plano $z=8$.

Exercício 6: Calcule a área da superfície S parte do plano $x+y+z=a$, interior ao cilindro $x^2+y^2=a^2$.

Exercício 7: Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x-2)^2+4y^2 \leq 1$.

Exercício 8: Determine a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, cortada pela parte superior do cone $x^2+y^2=z^2$.