Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 10 – Tutor

Exercício 1: Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (u, v, 1 - v^2)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

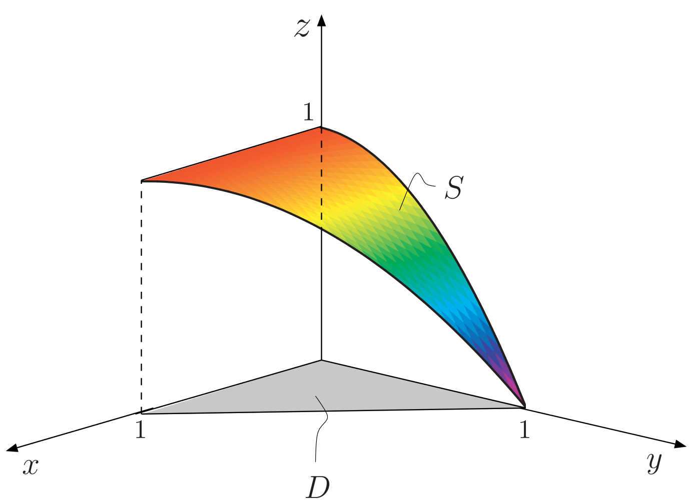
a) Desenhe S.

b) Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi\left(1/2, 1/4\right)$.

c) Determine a área de S.

Solução:

a) Temos $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v^2 \end{cases}$ com $(u,v) \in D : u + v \leq 1$, $u \geq 0$ e $v \geq 0$ portanto, eliminando os parâmetros, temos $S : z = 1 - y^2$ com $(x,y) \in D_{xy} : x + y \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Logo, o esboço de S está representado na figura que se segue.



b) Temos $\varphi\left(1/2, 1/4\right) = (1/2, 1/4, 15/16)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$ portanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (0, -2v, 1)\,.$$

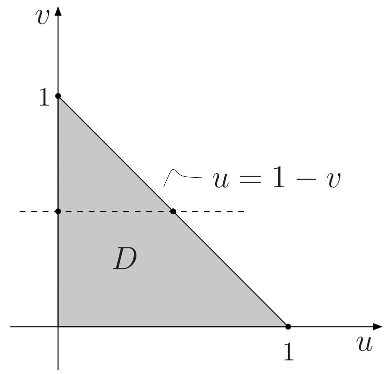
Logo, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\,(0, 1/2, 1/4) = (0, -1/2, 1)$ é um vetor normal a S em $\varphi\left(1/2, 1/4\right)$. Portanto, uma equação do plano tangente a S em $\varphi\left(1/2, 1/4\right)$ é dada por

$$\left[(x,y,z) - \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 0$$

ou $\left(x - \dfrac{1}{2}\,,\, y - \dfrac{1}{4}\,,\, z - \dfrac{15}{16}\right) \cdot \left(0, -\dfrac{1}{2}\,, 1\right) = 0$ ou, $-y + 2z = \dfrac{13}{8}$.

c) Temos

$$A(S)=\iint_D \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv=\iint_D \sqrt{1+4v^2}\,dudv\,.$$



Enquadrando D como tipo II, temos $D:\begin{cases}0\le v\le 1\\ 0\le u\le 1-v\end{cases}$. Logo,

$$A(S)=\int_0^1\int_0^{1-v}\sqrt{1+4v^2}\,dudv=\int_0^1(1-v)\sqrt{1+4v^2}\,dv=$$

$$=\underbrace{\int_0^1\sqrt{1+4v^2}\,dv}_{I_1}-\underbrace{\int_0^1 v\sqrt{1+4v^2}\,dv}_{I_2}\,.$$

Cálculo de I_1

Fazendo $2v=\operatorname{tg}\theta$, temos $dv=\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$. Para $\begin{cases}v=0\\ v=1\end{cases}$ temos $\begin{cases}\theta=0\\ \theta=\operatorname{arctg}2\end{cases}$. Então,

$$I_1=\int_0^{\operatorname{arctg}2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}2}\sec^3\theta\,d\theta\,.$$

Do Cálculo II, temos

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)+C\ \text{(Verifique!)}$$

Logo,

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)\right]_0^{\operatorname{arctg}2}\,.$$

Fazendo $u=\operatorname{arctg}2$ temos $\operatorname{tg}u=2$. Então $\sec^2u=1+\operatorname{tg}^2u=5$, portanto $\sec u=\sqrt{5}$ ou $\sec(\operatorname{arctg}2)=\sqrt{5}$. Então,

$$I_1=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\,.$$

Cálculo de I_2

Temos

$$I_2 = \int_0^1 v\sqrt{1+4v^2}\,dv = \int_0^1 v\left(1+4v^2\right)^{1/2}\,dv\,.$$

Como $d\left(1+4v^2\right) = 8v\,dv$, temos

$$I_2 = \frac{1}{8}\int_0^1 \left(1+4v^2\right)^{1/2}\,d\left(1+4v^2\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+4v^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\,.$$

Assim,

$$A(S) = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \frac{1}{12}\ \text{u.a.}$$

Exercício 2: Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

a) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 1\}$.

b) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \ z=\sqrt{3(x^2+y^2)},\ x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

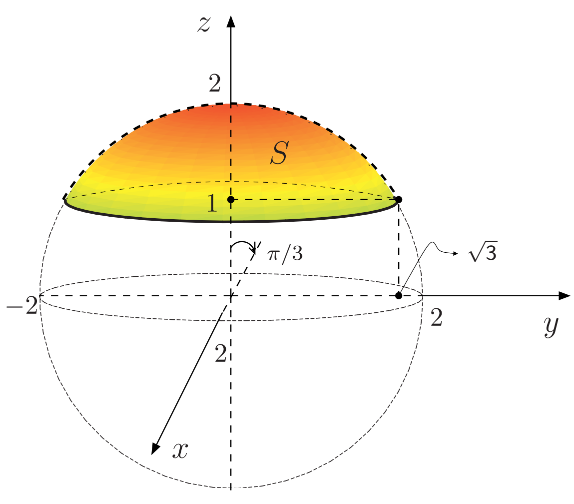
c) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \ x+y+z=2,\ x^2+y^2\leq 1\}$.

d) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2=4,\ 0\leq z\leq 2+\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right\}$.

e) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2=2y,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\}$.

Solução:

a) A superfície S está ilustrada na figura que se segue.

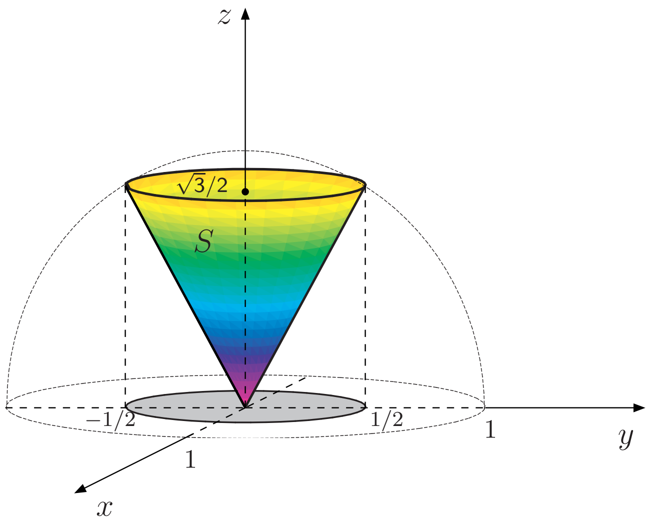


Usando ϕ e θ como parâmetros, temos $S : \varphi(\phi,\theta) = (2\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$, com $0\leq\phi\leq\pi/3$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$. Também podemos definir S usando as coordenadas retangulares x e y. Temos $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}\right)$, com $(x,y)\in D : x^2+y^2\leq 3$. Uma outra forma de definir S é usando as coordenadas r e θ. Temos $S : \varphi(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{4-r^2}\right)$, com $0\leq r\leq\sqrt{3}$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$.

b) Encontremos a interseção das duas superfícies:

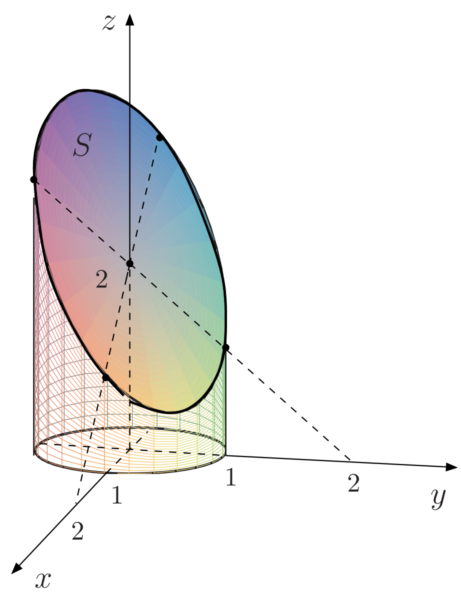
$$\begin{cases} z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+3(x^2+y^2) = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Elas se interceptam segundo uma circunferência contida no plano horizontal $z = \sqrt{3}/2$, de centro $\left(0,0,\sqrt{3}/2\right)$ e raio $1/2$.



Usando as coordenadas x e y para definir S, temos $\varphi(x,y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{3(x^2+y^2)}\right)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1/4$. Outra parametrização seria $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{3}\,r)$, com $0 \leq r \leq 1/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) O esboço de S pode ser visto na figura que se segue.



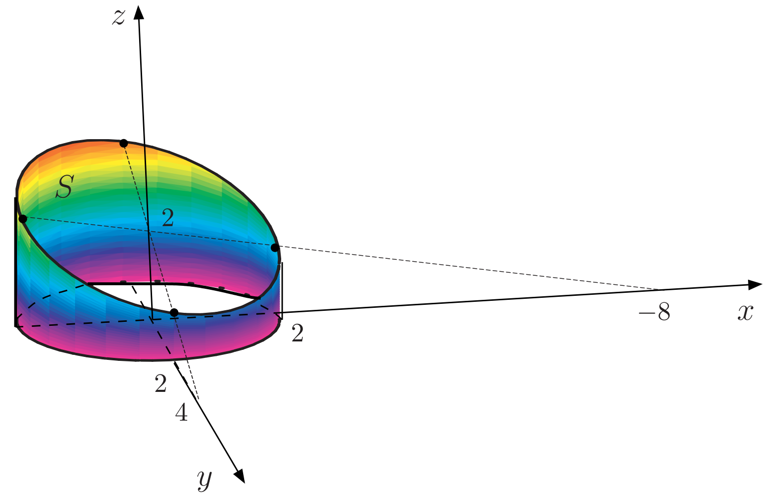
Uma parametrização é dada por $S : \varphi(x,y) = (x,\ y,\ 2-x-y)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1$. Outra parametrização seria $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 2 - r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

d) O esboço de S está na figura ao lado.
Adotando θ e z como parâmetros, definimos S por

$$\varphi(\theta, z) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z)$$

com

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 + \dfrac{\cos\theta}{2} - \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}.$$



e) A superfície S está ilustrada na figura ao lado.
Seja $(x, y, z) \in S$. Então, x e y satisfazem $x^2 + y^2 = 2y$ ou $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Logo,

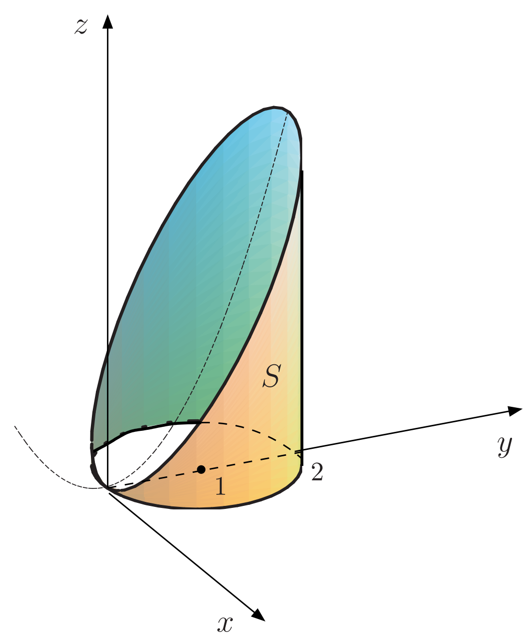
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$.
Adotando t e z como parâmetros, temos a seguinte parametrização para S:

$$\varphi(t, z) = (\cos t,\ 1 + \mathrm{sen}\,t,\ z)$$

com

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2(1 + \mathrm{sen}\,t) \end{cases}.$$



Exercício 3: Seja $C = \left\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 + (y-2)^2 = 1\right\}$. Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo z.

Solução: Uma parametrização da curva C é dada por

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 2 + \cos t\,, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = \mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

Se $(x, y, z) \in S$, então (x, y, z) pertence à circunferência de raio $y(t) = 2 + \cos t$ e de centro $(0, 0, z(t)) = (0, 0, \mathrm{sen}\,t)$. Então

$$\begin{cases} x = (2 + \cos t)\cos\theta \\ y = (2 + \cos t)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z(t) = \mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Assim, uma parametrização de S é dada por

$$S : \varphi(t,\theta) = \big((2+\cos t)\cos\theta\,,\ (2+\cos t)\,\text{sen}\,\theta\,,\ \text{sen}\, t\big)$$

com

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (-\,\text{sen}\, t\cos\theta\,,\ -\,\text{sen}\, t\,\text{sen}\,\theta\,,\ \cos t) \\ \varphi_\theta &= \big(-(2+\cos t)\,\text{sen}\,\theta\,,\ (2+\cos t)\cos\theta\,,\ 0\big) \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \varphi_t \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\,\text{sen}\, t\cos\theta & -\,\text{sen}\, t\,\text{sen}\,\theta & \cos t \\ -(2+\cos t)\,\text{sen}\,\theta & (2+\cos t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \Big(-(2+\cos t)\cos t\cos\theta\,,\ -(2+\cos t)\cos t\,\text{sen}\,\theta\,,\ \underbrace{-(2+\cos t)\,\text{sen}\, t\cos^2\theta - (2+\cos t)\,\text{sen}\, t\,\text{sen}^2\theta}_{=\ -(2+\cos t)\,\text{sen}\, t}\Big) \\ &= (2+\cos t)\,(-\cos t\cos\theta, -\cos t\,\text{sen}\,\theta, -\,\text{sen}\, t)\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\varphi_t \times \varphi_\theta\| &= (2+\cos t)\sqrt{\underbrace{\cos^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t\,\text{sen}^2\theta}_{=\ \cos^2 t} + \text{sen}^2 t} = \\ &= (2+\cos t)\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 2+\cos t\,. \end{aligned}$$

Como

$$A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\|\ dt d\theta,$$

temos

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D (2+\cos t)\ dt d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2+\cos t)\ dt d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[2t + \text{sen}\, t\Big]_0^{2\pi}\ d\theta = 4\pi\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi^2 \quad \textit{u.a.} \end{aligned}$$

Exercício 4: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ em torno do eixo z.

a) Dê uma parametrização de S.
b) Calcule a área de S.

Solução:

a) O segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ é parametrizado por

$$\gamma(t) = (0,1,3) + t\left((0,3,1) - (0,1,3)\right) = (0, 1+2t, 3-2t)\,,$$

com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $x(t) = 0$, $y(t) = 1+2t$ e $z(t) = 3-2t$, com $0 \leq t \leq 1$.

A superfície de revolução tem como parametrização

$$\varphi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, z(t)) = ((1+2t)\cos\theta, (1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta, 3-2t)$$

com

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

b) Temos $A(S) = \displaystyle\iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\|\, dt d\theta$ onde

$$\begin{aligned}
\varphi_t \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 2\cos\theta & 2\,\mathrm{sen}\,\theta & -2 \\ -(1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta & (1+2t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \Big(2(1+2t)\cos\theta, 2(1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta, \underbrace{2(1+2t)\cos^2\theta + 2(1+2t)\,\mathrm{sen}^2\,\theta}_{2(1+2t)}\Big) \\
&= 2(1+2t)(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1)
\end{aligned}$$

portanto $\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = 2(1+2t)\sqrt{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta + 1} = 2\sqrt{2}(1+2t)$.

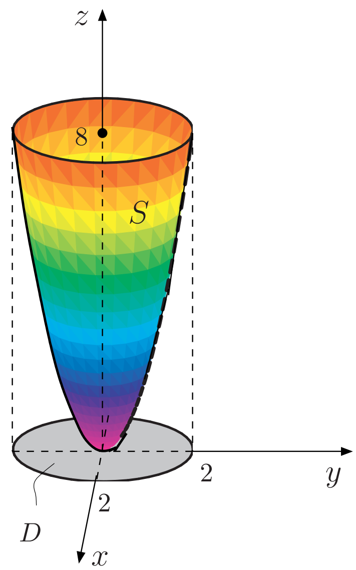
Logo,

$$A(S) = \iint_D 2\sqrt{2}(1+2t)\,dt d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1+2t)\,d\theta dt =$$

$$= 4\pi\sqrt{2}\int_0^1 (1+2t)\,dt = 4\pi\sqrt{2}\Big[t + t^2\Big]_0^1 = 8\pi\sqrt{2} \ \ u.a.$$

Exercício 5: Determine a área do paraboloide $z = 2\left(x^2+y^2\right)$, abaixo do plano $z = 8$.

Solução: O esboço da superfície S pode ser visto na figura que se segue.



Definimos S da seguinte maneira:

$$S : z = 2\left(x^2+y^2\right) = f(x,y)\,,$$

com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4$. Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

temos

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+(4x)^2+(4y)^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1+16x^2+16y^2}\,dx\,dy\,.$$

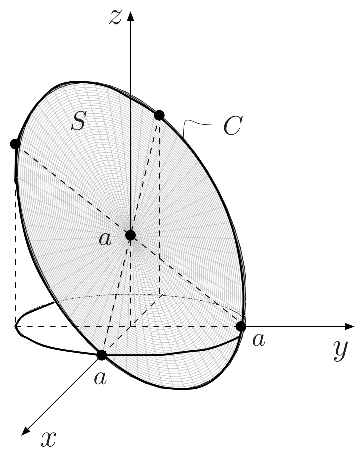
Em coordenadas polares, temos

$$A(S) = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1+16r^2}\;r\,dr\,d\theta = \int_0^2\int_0^{2\pi}\left(1+16r^2\right)^{1/2} r\,d\theta dr =$$

$$= \frac{2\pi}{32}\int_0^2\left(1+16r^2\right)^{1/2} d\left(1+16r^2\right) = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+16r^2\right)^{3/2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{24}\left(65\sqrt{65}-1\right)$$ *u.a.*

Exercício 6: Calcule a área da superfície S, parte do plano $x+y+z=a$, interior ao cilindro $x^2+y^2=a^2$.



Solução: A superfície S está ilustrada na figura ao lado. Temos

$$S : z = a - x - y = f(x,y)\,,$$

com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \le a^2$. Como

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

temos

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dx\, dy = \sqrt{3} \iint\limits_D dx\, dy = \sqrt{3}\ A(D)\ =\ \sqrt{3}\,\pi\, a^2\ u.a.$$

Exercício 7: Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x-2)^2 + 4y^2 \le 1$.

Solução: Tem-se $S : z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{=\ f(x,y)}$, com $(x,y) \in D : (x-2)^2 + 4y^2 \le 1$. Como S é o gráfico de $z = f(x,y)$,com $(x,y) \in D$, usaremos a fórmula

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy\,.$$

Tem-se

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Logo,

$$\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}\,.$$

Então,

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}\, A(D)\,.$$

Como D é uma elipse com $a = 1$, $b = 1/2$, temos

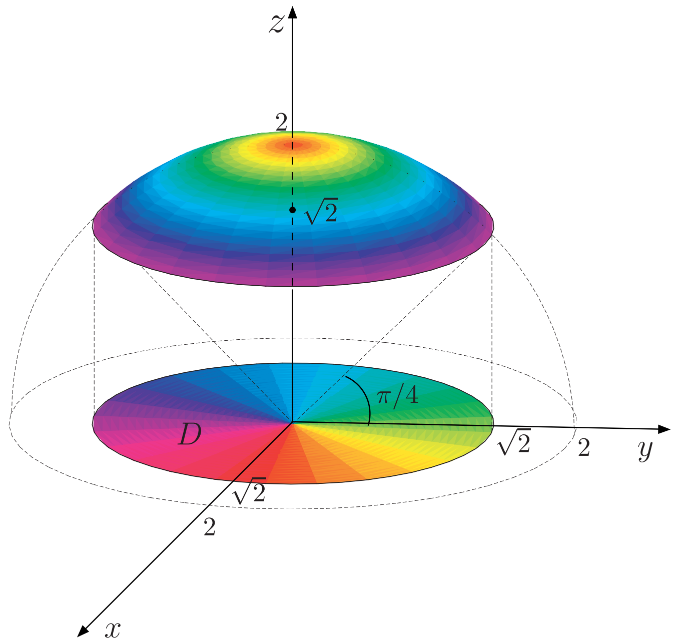
$$A(D) = \pi ab = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Logo,

$$A(S) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\quad u.a.$$

Exercício 8: Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2 + y^2 = z^2$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=z^2$ temos $x^2+y^2=2$ e $z=\sqrt{2}$. Logo, a curva interseção das superfícies é a circunferência $x^2+y^2=2$ contida no plano $z=\sqrt{2}$. O esboço de S está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de S é: $S:\varphi(\phi,\theta)=(\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$ com

$$(\phi,\theta)\in D:\begin{cases}0\le\phi\le\pi/4\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

Da aula 19, temos $dS=\operatorname{sen}\phi\,d\phi d\theta$. Como $A(S)=\iint\limits_D dS$ temos

$$A(S)=\iint\limits_D \operatorname{sen}\phi\,d\phi d\theta=\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\theta d\phi=2\pi\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}\phi\,d\phi=$$

$$=2\pi\big[-\cos\phi\big]_0^{\pi/4}=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\ \textit{u.a.}$$