Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 11 – Tutor

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\, dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u,v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (u^2+1)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

com $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le 2$.

Solução:
Temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u,\ 0,\ 1)$$

portanto $\left\| \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+4u^2}\,.$

Também

$$dS = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| dudv = \sqrt{1+4u^2}\, dudv\,.$$

Então,

$$\iint_S \big(z - x^2 + xy^2 - 1\big)\, dS = \iint_D \big(u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1\big)\sqrt{1+4u^2}\, dudv =$$

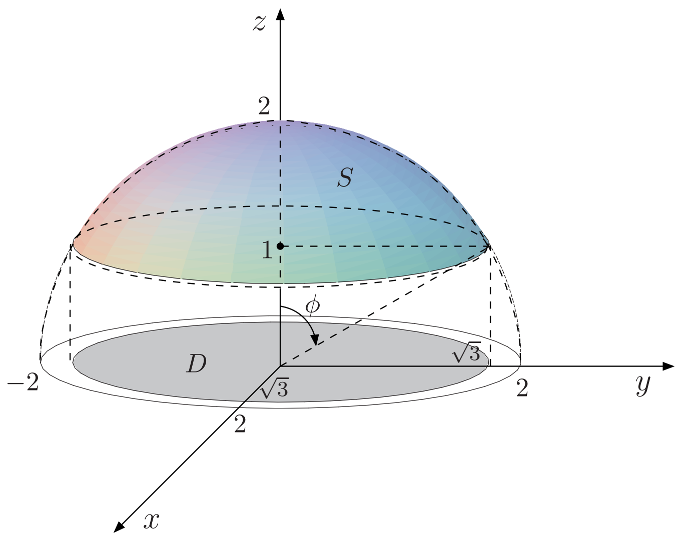
$$= \iint_D uv^2\sqrt{1+4u^2}\, dudv = \int_0^1 \int_0^2 u\big(1+4u^2\big)^{1/2} v^2\, dvdu =$$

$$= \int_0^1 u(1+4u^2)^{1/2} \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 du = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 \big(1+4u^2\big)^{1/2}\, d\big(1+4u^2\big) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \Big[\big(1+4u^2\big)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}\big(5\sqrt{5} - 1\big)\,.$$

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iint_S f(x,y,z)\, dS$, onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \ge 1$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Observe que $\operatorname{tg}\phi = \sqrt{3}/1$ implica $\phi = \pi/3$. Uma parametrização de S é dada por $\varphi(\phi,\theta) = (2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\phi)$ com $(\phi,\theta) \in D : 0 \leq \phi \leq \pi/3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Já vimos que, no caso da esfera, $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Logo, $dS = 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$. Assim:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f\left(\varphi(\phi,\theta)\right) 4\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 4\iint_D \left(4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta =$$

$$= 16\iint_D \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta = 16\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\operatorname{sen}\phi\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= -32\pi\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\, d(\cos\phi) = -32\pi\left[\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= -32\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{20\pi}{3}\,.$$

Exercício 3: Calcule $\displaystyle\iint_S x^2 z\, dS$, onde S é o cilindro $x^2+y^2 = a^2$, com $0 \leq z \leq 1$.

Solução: Podemos parametrizar o cilindro usando as coordenadas cilíndricas com $r = a$. Então $S : \varphi(\theta,z) = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, z)$, com $(\theta,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$. Calculemos $\varphi_\theta \times \varphi_z(\theta,z)$ e seu módulo. Temos

$$\varphi_\theta = (-a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta, 0)$$

$$\varphi_z = (0,0,1)$$

portanto

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ -a\operatorname{sen}\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, 0)\,.$$

Observe que o vetor normal, em cada ponto do cilindro, é paralelo ao plano xy e é a projeção normal de $\varphi(\theta, z)$.

Tem-se:

$$\|\varphi_\theta \times \varphi_z\| = a\,.$$

Logo,

$$dS = \|\varphi_\theta \times \varphi_z\|\; d\theta dz = a d\theta dz\,.$$

Então,

$$\iint_S x^2 z\, dS = \iint_D (a\cos\theta)^2 z \cdot a\; d\theta dz =$$

$$= a^3 \iint_D z\cos^2\theta\; d\theta dz = a^3 \int_0^1 z \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\; d\theta dz =$$

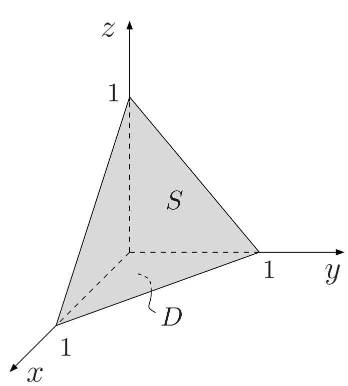
$$= a^3 \cdot \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^1 z\; dz = \pi a^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi a^3}{2}\,.$$

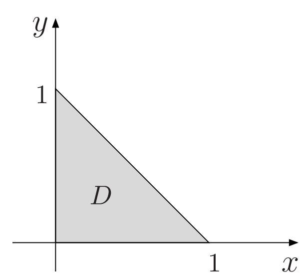
Obs.: Uma outra maneira de parametrizar S é:

Se $(x, y, z) \in S$, então x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = a^2$ e z é tal que $0 \leq z \leq 1$. Parametrizando a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, tem-se $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Adotando t e z como parâmetros, tem-se $S : \varphi(t, z) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, z)$, com $(t, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_S x\, dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Solução: A superfície S e a sua projeção sobre o plano xy estão ilustradas nas figuras que se seguem.





Definimos S por $S : z = 1 - x - y = f(x, y)$, onde $(x, y) \in D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$. Temos que:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy\,.$$

Então,

$$\iint_S x\,dS = \iint_D x\sqrt{3}\,dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x\,dydx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

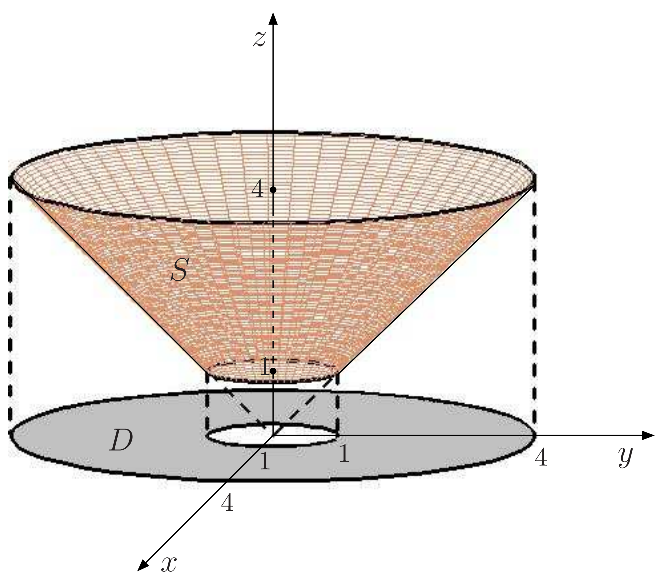
Exercício 5: Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

a) Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.

b) Parametrize S usando as coordenadas polares.

c) Calcule $\iint_S z^2\,dS$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



a) Como S é o gráfico da função $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com $(x,y) \in D : 1 \leq x^2+y^2 \leq 16$, então, adotando x e y como parâmetros, temos $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y) \in D : 1 \leq x^2+y^2 \leq 16$.

b) Adotando r e θ como parâmetros, temos

$$S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$$

onde $(r,\theta) \in D_{r\theta} : 1 \leq r \leq 4\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) Consideremos a parametrização do item (a) para calcular a integral. Temos, então,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\;dxdy$$

onde $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Então,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{1+1}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\,.$$

Assim:

$$\iint_S z^2\, dS = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_D \left(x^2+y^2\right)\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

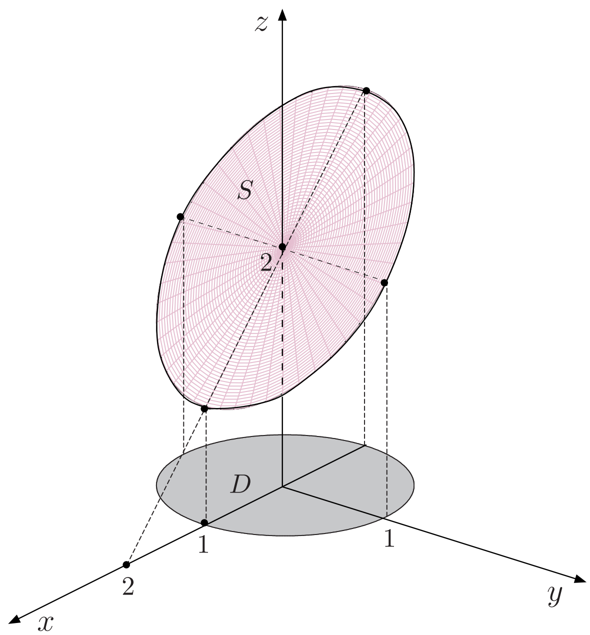
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy & = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 & = & r^2 \end{array}\right. .$$

Transformando o conjunto D em coordenadas polares, temos $D_{r\theta} : 1 \leq r \leq 4\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S z^2\, dS &= \sqrt{2}\iint_{D_{r\theta}} r^2 r\, drd\theta = \sqrt{2}\int_1^4 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \\ &= 2\sqrt{2}\pi\int_1^4 r^3\, dr = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^4 = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}(256-1) = \frac{255\sqrt{2}\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2-x$ dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = y^2$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



A superfície S é descrita por $S : z = f(x,y) = 2 - x$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$, então

$$dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\,.$$

Temos

$$M = \iint\limits_S \delta(x,y,z)\, dS = \iint\limits_S y^2\, dS = \iint\limits_D y^2 \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D y^2\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos:

$$\iint\limits_D y^2\, dxdy = \iint\limits_{D_{r\theta}} (r^2 \operatorname{sen}^2\theta) r\, drd\theta = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen}^2\theta\, drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \int_0^1 r^3\, drd\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta =$$

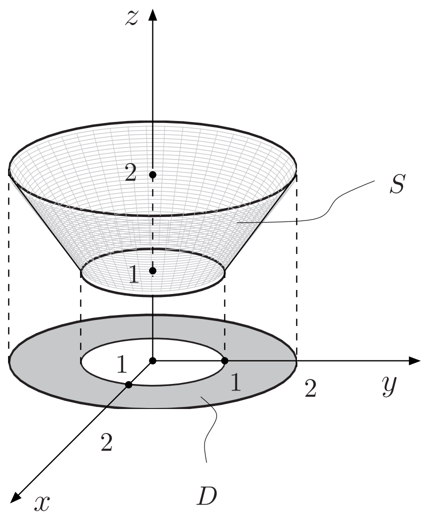
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Logo,

$$M = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\, \textit{u.m.}$$

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$, entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Note que o eixo de S é o eixo z. Então

$$I_z = \iint_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\ dS$$

onde $\rho(x,y,z)=\rho$. Logo,

$$I_z = \rho\iint_S \left(x^2+y^2\right)\ dS\,.$$

A superfície S pode ser descrita por $S: z=\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$, com $(x,y)\in D: 1\leq x^2+y^2\leq 4$. Tem-se:

$$z_x = f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y = f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

portanto

$$1+(z_x)^2+(z_y)^2 = 1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2} = 1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2\,.$$

Como $dS=\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\ dxdy$, então $dS=\sqrt{2}\ dxdy$. Tem-se:

$$I_z = \rho\iint_S (x^2+y^2)\ dS = \rho\iint_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\ dxdy = \sqrt{2}\rho\iint_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &=& rdrd\theta \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad D_{r\theta}: \left\{\begin{array}{l} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 1\leq r\leq 2\,. \end{array}\right.$$

Então,

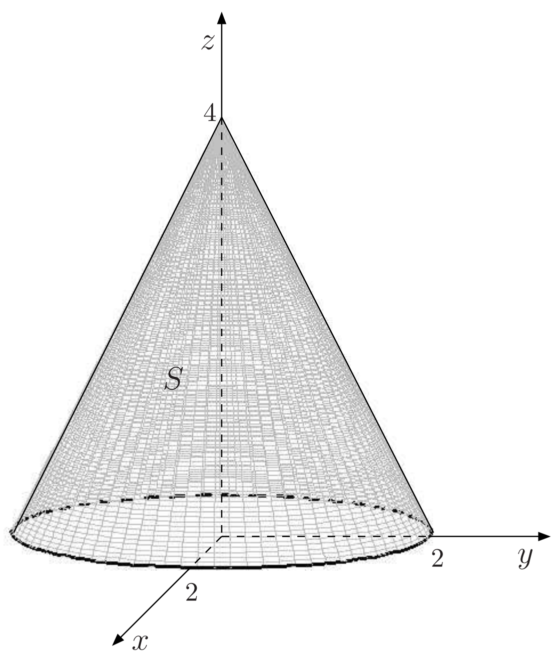
$$I_z = \sqrt{2}\,\rho \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r\, drd\theta = \sqrt{2}\,\rho \iint_{D_{r\theta}} r^3\, drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\,\rho \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\sqrt{2}\,\rho\pi \int_1^2 r^3\, dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}(16-1) = \frac{15\sqrt{2}\,\rho\pi}{2}\,.$$

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ e limitado pelo plano xy. Em cada ponto de S, a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de S é dada por $S : \varphi(x,y) = \left(x, y, 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4$. Temos $z_x = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $z_y = \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy = \sqrt{1+4}\, dxdy = \sqrt{5}\, dxdy\,.$$

Como a distância de (x,y,z) ao eixo z é igual a $\sqrt{x^2+y^2}$ então a densidade $\delta(x,y,z)$ é dada por $\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$, onde k é uma constante positiva. A massa M de S é dada por:

$$M=\iint_S \delta(x,y,z)\,dS=k\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=$$

$$=k\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{5}\,dxdy=\sqrt{5}k\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{5}k\int_0^2\int_0^{2\pi} r\cdot r\,d\theta dr=2\sqrt{5}k\pi\int_0^2 r^2\,dr=$$

$$=2\sqrt{5}k\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2=\frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}\ \textit{u.m.}$$

O momento de inércia em relação ao eixo z é dado por:

$$I_z=\iint_S \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dS=k\iint_S \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\,dS=$$

$$=\sqrt{5}k\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\,dxdy=\sqrt{5}k\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r^2\right)^{3/2} r\,d\theta dr=$$

$$=2\sqrt{5}k\pi\int_0^2 r^4\,dr=2\sqrt{5}k\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2=\frac{64\sqrt{5}k\pi}{5}=$$

$$=\frac{12}{5}\cdot\frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}=\frac{12}{5}M\,.$$