Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 12

Aula 23 – Integral de Superfície de um Campo Vetorial

Objetivo

- Compreender a noção de superfície orientável,
- Estudar as integrais de superfície de campos vetoriais.

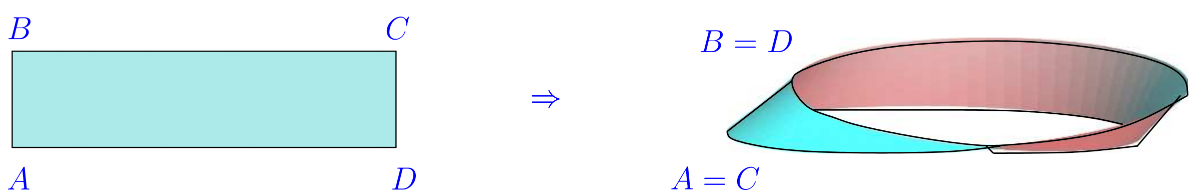
Integral de superfície de um campo vetorial

Hoje vamos integrar campos vetoriais sobre superfícies. Quando estudamos as integrais de linha de campos vetoriais, vimos que a definição dependia da orientação da curva, isto é,

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} \,.$$

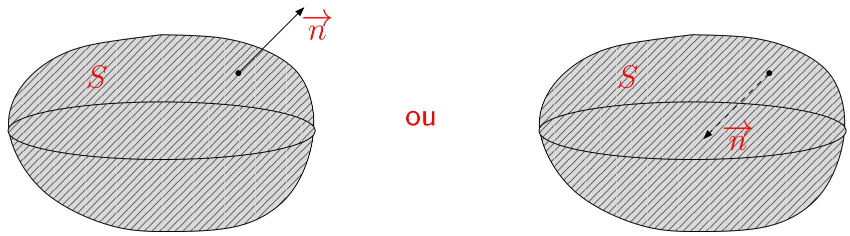
Aqui, em integral de superfície de um campo vetorial ou fluxo de um campo vetorial, a definição também depende do conceito de superfície orientada, que passaremos a definir.

Dizemos que S é uma superfície orientável quando for possível escolher sobre S um campo de vetores unitários normais a S, que varie continuamente sobre S. Intuitivamente falando, significa que S tem dois lados. Há superfícies que tem um lado só como, por exemplo, a fita de Möbius que pode ser facilmente construída. Peguem uma tira de papel retangular $ABCD$. Pintem um lado de vermelho e o outro de azul. Fixem o lado AB e façam uma meia volta com o lado CD e colem A com C e B com D.



A fita de Möbius tem apenas um lado, pois as duas cores se encontram.

OBS.: Superfícies fechadas orientáveis terão duas orientações "naturais", determinadas pela normal "exterior" e pela normal "interior".



Daqui para frente só consideraremos superfícies orientáveis (com dois lados).

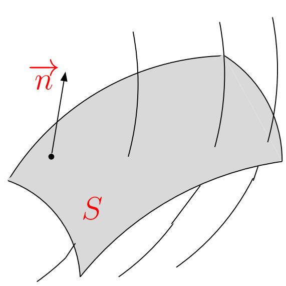
Definição 1:

Seja S uma superfície regular orientável. Seja $\overrightarrow{n}$ uma orientação de S. Seja $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo S. A integral de superfície de $\overrightarrow{F}$ através de S ou o fluxo ϕ de $\overrightarrow{F}$ através de S é a integral de superfície do campo escalar $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}$:

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS\,.$$

OBS.:

1) Se $\overrightarrow{F}$ representa o campo de velocidades de um fluido, essa integral fornece o volume do fluido que atravessa S em uma unidade de tempo, na direção de $\overrightarrow{n}$.



2) Se S é parametrizada por $\varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$, então

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS = \iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\|\; dudv = \iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\; dudv$$

se $\overrightarrow{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ e

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = -\iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\ dudv$$

se $\overrightarrow{n} = -\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$.

3) Se S é o gráfico da função $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então:

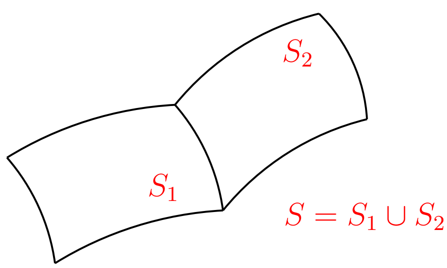
$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_D \overrightarrow{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\ dxdy$$

se $\overrightarrow{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}}$ e

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_D \overrightarrow{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (f_x, f_y, -1)\ dxdy$$

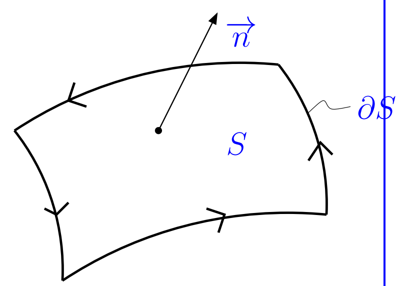
se $\overrightarrow{n} = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}}$.

4) Queremos definir $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$, onde $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$.



Definição 2:

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários $\overrightarrow{n}$. Dizemos que o bordo de S, ∂S, está orientado positivamente se, ao caminhar ao longo de ∂S, com

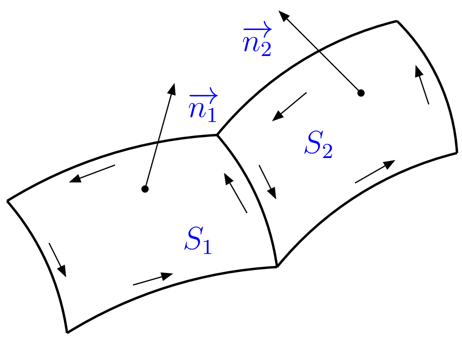


a cabeça no sentido de $\overrightarrow{n}$, tivermos S à nossa esquerda.

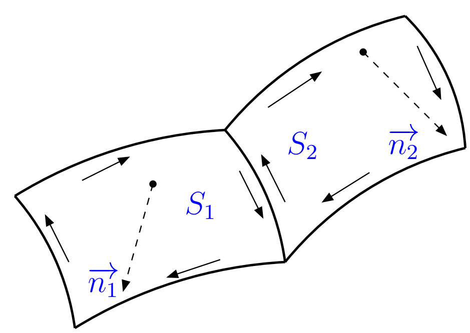
OBS.: Uma regra prática para orientar ∂S é a conhecida "regra da mão direita" com polegar no sentido de $\overrightarrow{n}$.

Definição 3:

Dizemos que $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$ está orientada se for possível orientar cada S_i, de forma que nos bordos comuns a duas superfícies, as orientações resultem opostas.



ou



Então,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS + \cdots + \iint_{S_m} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_m}\, dS\,.$$

Exemplo 1

Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 2x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x+y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - 2xy\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ através da superfície $S : \varphi(u,v) = \left(u, v, 1-u^2-v^2\right)$, com $(u,v) \in D : 0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1$, com normal $\overrightarrow{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||}$.

Solução:

Temos $\varphi_u = (1, 0, -2u)$ e $\varphi_v = (0, 1, -2v)$, portanto,

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)\,.$$

O fluxo de $\overrightarrow{F}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS &= \iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)) \cdot \tfrac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\|\; dudv \\
&= \iint_D \overrightarrow{F}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\; dudv \\
&= \iint_S (2u, u+v, -2uv) \cdot (2u, 2v, 1)\; dudv \\
&= \iint_S \left(4u^2 + 2uv + 2v^2 - 2uv\right)\; dudv \\
&= \iint_S \left(4u^2 + 2v^2\right)\; dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(4u^2 + 2v^2\right)\; dudv \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{4u^3}{3} + 2uv^2\right]_0^1 dv \\
&= \int_0^1 \left(\tfrac{4}{3} + 2v^2\right)\; dv \\
&= \left[\tfrac{4}{3}v + \tfrac{2}{3}v^3\right]_0^1 \\
&= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ através da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com a normal exterior.

Solução:

Lembremos que, no caso da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ (ver Aula 19), temos $\overrightarrow{n}=\frac{(x,y,z)}{a}$. Então, o fluxo é dado por:

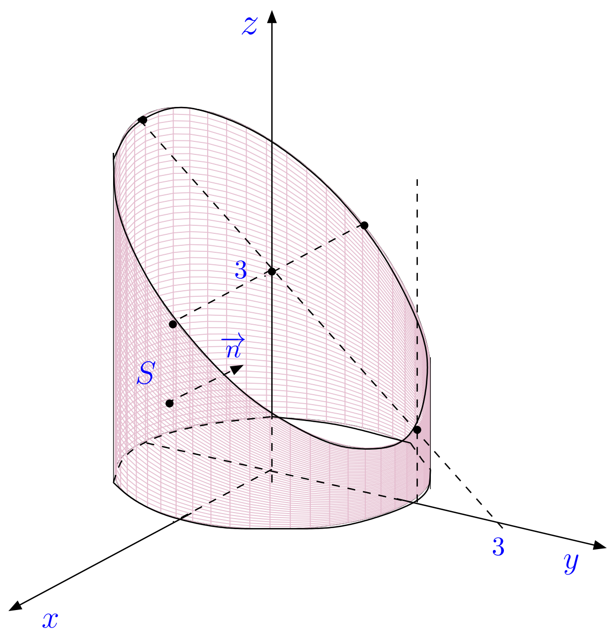
$$\begin{aligned}\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_S (x,y,z)\cdot\frac{(x,y,z)}{a}\,dS=\iint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{a}\,dS=\iint_S \frac{a^2}{a}\,dS &= a\iint_S dS\\ &= aA(S)\\ &= a4\pi a^2\\ &= 4\pi a^3\,.\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z)=x\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S a parte do cilindro $x^2+y^2=4$, entre $z=0$ e $y+z=3$, com a orientação normal que aponta para o eixo z.

Solução:

O esboço de S é:



Lembremos que, no caso do cilindro $x^2+y^2=a^2$ (ver Aula 19), o vetor unitário normal interior a S é $\overrightarrow{n}=\frac{(-x,-y,0)}{2}$. Então,

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_S (x,y,z)\cdot\frac{(-x,-y,0)}{2}\,dS=-\iint_S \frac{(x^2+y^2)}{2}\,dS=-\iint_S \frac{4}{2}\,dS=-2\iint_S dS\,.$$

Para calcular $\displaystyle\iint_S dS$, devemos parametrizar S. Logo $S : \varphi(t,z) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, z)$, com $(t,z) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 3 - 2\,\text{sen}\,t$.

Vimos na Aula 19 que $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = \|(2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 0)\| = 2$. Como $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\|\ dtdz$, então $dS = 2\ dtdz$. Logo,

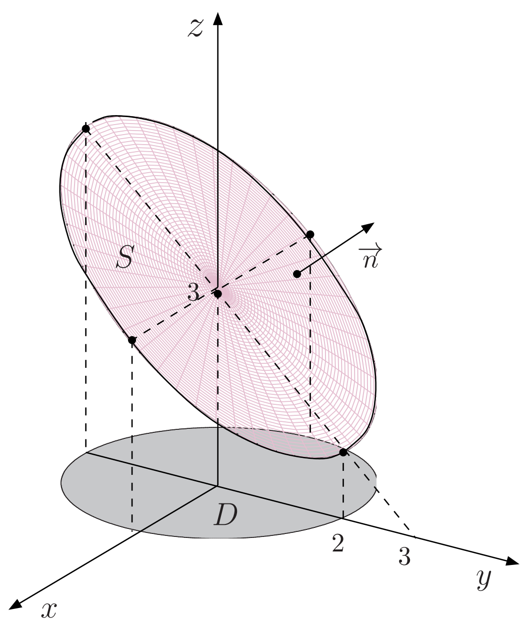
$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = -2\iint_D 2\ dtdz = -4\int_0^{2\pi}\int_0^{3-2\,\text{sen}\,t} dzdt = -4\int_0^{2\pi}(3 - 2\,\text{sen}\,t)\ dt = -24\pi\,.$$

Exemplo 4

Calcule $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S a parte do plano $y+z=3$, limitada pelo cilindro $x^2+y^2=4$, orientada com a normal $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} \geq 0$.

Solução:

O esboço de S é dado a seguir.



Se $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} \geq 0$ então a componente z de $\overrightarrow{n}$ é maior ou igual a zero, portanto, $\overrightarrow{n}$ aponta para cima. A superfície S pode ser descrita por $S : z = 3 - y = f(x,y)$, com $(x,y) \in S : x^2+y^2 \leq 4$. Um vetor normal a S é dado por $\overrightarrow{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (0,0,1)$ que aponta para cima. Logo, $\overrightarrow{n} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$.

Por outro lado, sabemos da Aula 19 que $dS = \|\overrightarrow{N}\|\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS &= \iint_D (x,y,3-y)\cdot\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,dxdy \\
&= \iint_D (y+3-y)\,dxdy \\
&= 3\iint_D dxdy \\
&= 3\,A(D) \\
&= 3\pi 2^2 \\
&= 12\pi\,.
\end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, no primeiro octante com a normal apontando para fora.

Exercício 2: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Exercício 3: Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\mathbf{i}} + x\,\vec{\mathbf{j}} - 3y^2z\,\vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S, parte do cilindro $x^2+y^2 = 16$, situado no primeiro octante, entre $z=0$ e $z=5$ e a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{i}} \geq 0$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ e S a região do plano $2x+3y+z = 6$, situada no primeiro octante, com $\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{k}} \geq 0$.

Exercício 5: Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ através da superfície lateral do cilindro circular $x^2+y^2 = 1$, limitada inferiormente pelo plano $x+y+z = 1$ e superiormente pelo plano $x+y+z = 2$, com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Exercício 6: Calcule o fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,-x,z^2)$ através da superfície $S : z = x^2+y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, na direção do vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Exercício 7: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$, onde $\overrightarrow{F} = x^2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y^2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $x+y = 2$, delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z = 4$ e a normal se a afasta da origem.

Exercício 8: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$, onde $\overrightarrow{F} = (z^2 - x\,, -xy\,, 3z)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy, com vetor $\overrightarrow{n}$ exterior.

Exercício 9: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$, onde $\overrightarrow{F} = \left(x, y, -\frac{z^2}{2}\right)$, e S é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta AB, com $A = (0, 1, 2)$ e $B = (0, 2, 4)$, em torno do eixo z, onde o vetor normal $\overrightarrow{n}$ é exterior a S.

Exercício 10: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS$, onde $\overrightarrow{F} = 3y^2 z\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $y + z = 2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com campo de vetores normais $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} < 0$.