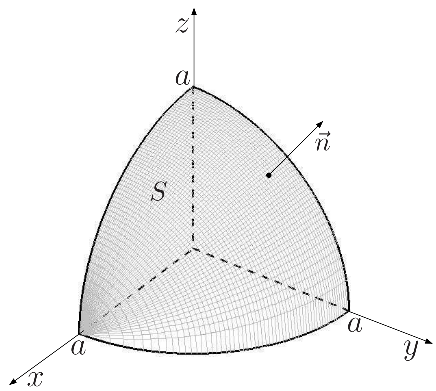
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 12 – Tutor

Exercício 1: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, no primeiro octante com a normal apontando para fora.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.

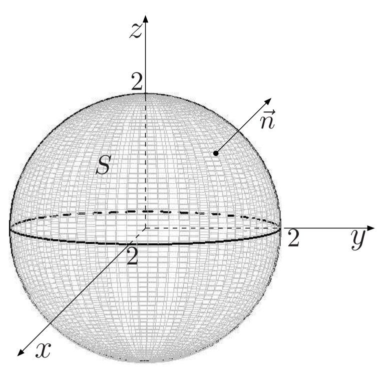


Como $\overrightarrow{n}$ aponta para fora de S, então $\overrightarrow{n} = \dfrac{(x,y,z)}{a}$. Assim:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint\limits_S (y,-x,0) \cdot \frac{(x,y,z)}{a}\, dS = \iint\limits_S \frac{xy-xy}{a}\, dS = \iint\limits_S 0\, dS = 0\,.$$

Exercício 2: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n}$ aponta para o exterior de S então $\overrightarrow{n} = \dfrac{(x,y,z)}{2}$. Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (x, y, -2z) \cdot \frac{(x, y, z)}{2}\, dS = \frac{1}{2} \iint_S \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) dS =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_S \Big(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=4} - 3z^2\Big) dS = 2A(S) - \frac{3}{2} \iint_S z^2\, dS\,.$$

Para calcular esta integral, devemos parametrizar S. Temos então:

$$S : \vec{r}(\phi\,, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta\,, 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta\,, 2 \cos \phi)\,,$$

com $(\phi\,, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ e $dS = 2^2 \operatorname{sen} \phi\; d\phi d\theta = 4 \operatorname{sen} \phi\; d\phi d\theta$. Então,

$$\iint_S z^2\, dS = \iint_D (2 \cos \phi)^2\, 4 \operatorname{sen} \phi\; d\phi d\theta = 16 \int_0^\pi \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

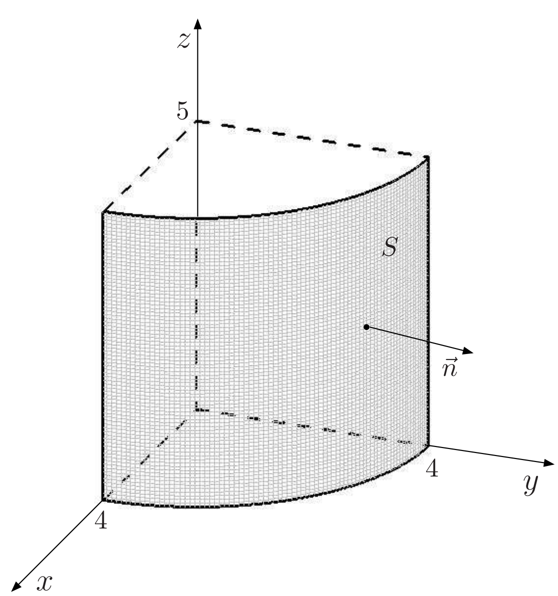
$$= -32\pi \int_0^\pi \cos^2 \phi\; d(\cos \phi) = -32\pi \left[\frac{\cos^3 \phi}{3}\right]_0^\pi = -\frac{32}{3}\pi\,(-1 - 1) = \frac{64\pi}{3}\,.$$

Como $A(S) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$. Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 2 \cdot 16\pi - \frac{3}{2} \cdot \frac{64\pi}{3} = 32\pi - 32\pi = 0\,.$$

Exercício 3: Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = z\, \vec{\mathbf{i}} + x\, \vec{\mathbf{j}} - 3y^2 z\, \vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S, parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado no primeiro octante, entre $z = 0$ e $z = 5$ e a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{i}} \geq 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{i}} \geq 0$, então a primeira componente de $\vec{n}$ é não-negativa. Logo, $\vec{n} = \dfrac{(x,y,0)}{a}$ com $a = 4$, isto é, $\vec{n} = \dfrac{(x,y,0)}{4}$. Assim, o fluxo é:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left(z, x, -3y^2 z\right) \cdot \frac{(x,y,0)}{4}\, dS = \frac{1}{4} \iint_S (xz + xy)\ dS\,.$$

Para calcular esta integral, devemos parametrizar S. Temos então $S : \vec{r}(t,\theta) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, z)$, com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases}$. Logo,

$$\vec{r_t} \times \vec{r_z} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4\,\mathrm{sen}\, t & 4\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, 0)$$

portanto,

$$\left\| \vec{r_t} \times \vec{r_z} \right\| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2\, t + 0} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Como $dS = \left\| \vec{r_t} \times \vec{r_z} \right\|\ dtdz$, então $dS = 4\ dtdz$. Assim:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \frac{1}{4} \iint_D \Big[(4\cos t)z + (4\cos t)(4\,\mathrm{sen}\, t)\Big] 4\ dtd\theta =$$

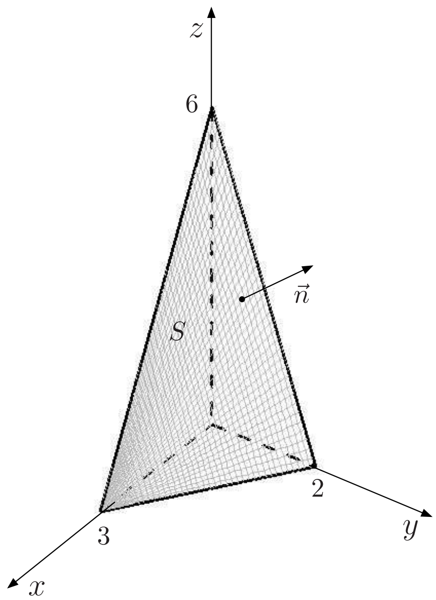
$$= \frac{4}{4} \int_0^5 \int_0^{\pi/2} \Big[(4\cos t)z + 16\cos t\,\mathrm{sen}\, t\Big] dtdz =$$

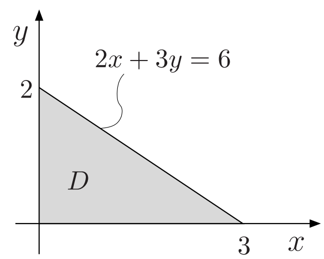
$$= \int_0^5 \left[\Big[4\,\mathrm{sen}\, t\Big]_0^{\pi/2} z + 8\Big[\mathrm{sen}^2\, t\Big]_0^{\pi/2} \right] dz = \int_0^5 (4z + 8)\ dz =$$

$$= \left[\frac{4z^2}{2} + 8z\right]_0^5 = 50 + 40 = 90\,.$$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ e S a região do plano $2x + 3y + z = 6$, situada no primeiro octante, com $\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{k}} \geq 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.





Temos que $S : z = 6 - 2x - 3y$, com $(x, y) \in D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \dfrac{6 - 2x}{3} \end{cases}$.

Da teoria temos que $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2, 3, 1)$ é um vetor normal a S, que satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{\mathbf{k}} \geq 0$, pois a última componente de $\vec{N}$ é positiva.

Então, $\vec{n} = \dfrac{(2, 3, 1)}{\sqrt{14}}$. Temos, também, que $dS = \sqrt{14}\ dxdy$. Assim, o fluxo é dado por:

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iint_D \vec{F}(x, y, 6 - 2x - 3y) \cdot (2, 3, 1)\ dxdy =$$

$$= \iint_D (x, y, 6 - 2x - 3y) \cdot (2, 3, 1)\ dxdy = \iint_D (2x + 3y + 6 - 2x - 3y)\ dxdy =$$

$$= \iint_D 6\ dxdy = 6A(D) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 18\,.$$

Exercício 5: Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ através da superfície lateral do cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$, limitada inferiormente pelo plano $x + y + z = 1$ e superiormente pelo plano $x + y + z = 2$, com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: Se $\overrightarrow{n}$ é exterior a S, então $\overrightarrow{n} = \dfrac{(x, y, 0)}{a} = \dfrac{(x, y, 0)}{1} = (x, y, 0)$. Logo, o fluxo é dado por:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_S (x, y, z) \cdot (x, y, 0)\ dS = \iint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=1}\ dS = \iint_S\ dS$$

onde S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(\theta\,, z) = (\cos\theta\,, \operatorname{sen}\theta\,, z)$, com $(\theta\,, z) \in D : 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

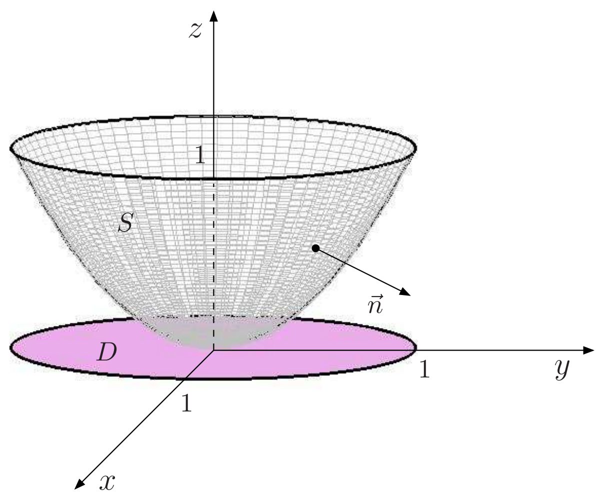
$1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta \leq z \leq 2-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$ e $dS = \underbrace{a}_{=1}\ d\theta dz = d\theta dz$. Assim:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_D d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}^{2-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta} dz d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\,.$$

Exercício 6: Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,z^2)$ através da superfície $S: z = x^2+y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, na direção do vetor normal $\vec{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Temos $S: z = z(x,y) = x^2+y^2$, com $(x,y) \in D: x^2+y^2 \leq 1$. Um vetor normal a S é dado por $\vec{N} = (-z_x\,,-z_y\,,1) = (-2x\,,-2y\,,1)$. Mas este vetor aponta para cima, isto é, para o interior de S. Logo, $-\vec{N} = (2x,2y,-1)$ aponta para o exterior de S. Assim, $\vec{n} = \dfrac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ e $dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dxdy$. Então,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_D \left(y,-x,\left(x^2+y^2\right)^2\right)\cdot(2x,2y,-1)\ dxdy =$$

$$= \iint_D \left(2xy-2xy-\left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy = -\iint_D \left(x^2+y^2\right)^2\ dxdy\,.$$

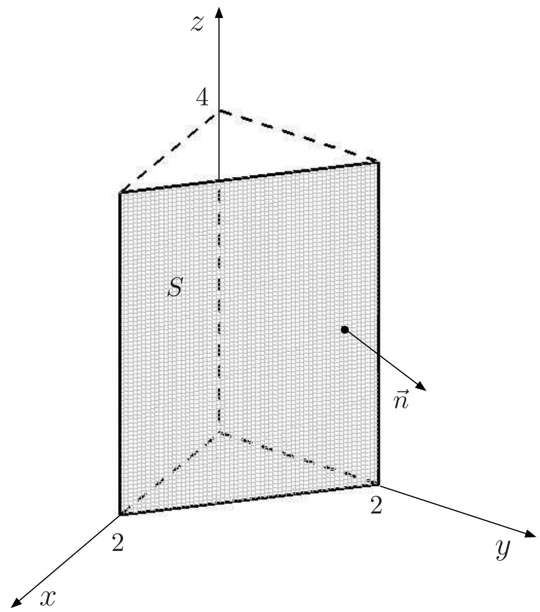
Passando para coordenadas polares, temos $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(r^2\right)^2 = r^4\,, dxdy = r\ drd\theta$ e $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Logo,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = -\iint_{D_{r\theta}} r^4\cdot r\ drd\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\ drd\theta =$$

$$= -\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Exercício 7: Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F} = x^2\,\vec{\mathbf{i}} + y^2\,\vec{\mathbf{j}} + z^2\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $x+y=2$, delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z=4$ e a normal se a afasta da origem.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Temos $S : y = y\,(x,z) = 2-x$ com $(x,z) \in D : 0 \leq x \leq 2\,, 0 \leq y \leq 4$. Então, uma parametrização de S é dada por $\vec{r}\,(x,z) = (x\,, 2-x\,, z)$, com $(x\,,z) \in D : 0 \leq x \leq 2\,, 0 \leq y \leq 4$. Um vetor normal a S é

$$\vec{N} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1\,,-1\,,0)\ .$$

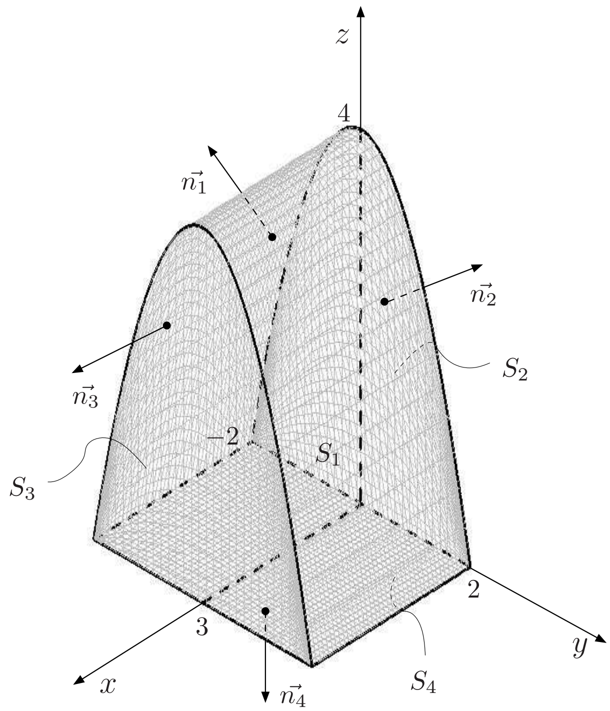
Este vetor aponta para a origem. Logo, $\vec{n} = -\dfrac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\;dxdz$. Assim,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS = \iint_D \left(x^2\,,(2-x)^2\;,z^2\right)\cdot(1,1,0)\;dxdz = \iint_D \left(x^2+(2-x)^2\right)dxdz =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2+(2-x)^2\right)\int_0^4\;dzdx = 4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\,(8+8) = \frac{64}{3}\,.$$

Exercício 8: Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F} = (z^2-x\,,-xy\,,3z)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z=4-y^2$, $x=0$, $x=3$ e o plano xy, com vetor $\vec{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Vemos que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde

$$S_1 : z = z\,(x,y) = 4 - y^2\,, (x,y) \in D_1 : 0 \leq x \leq 3\,, -2 \leq y \leq 2\,;$$

$$S_2 : x = 0\,, (y,z) \in D_2 : -2 \leq y \leq 2\,, 0 \leq z \leq 4 - y^2\,;$$

$$S_3 : x = 3\,, (x,y) \in D_2\,;$$

$$S_4 : z = 0\,, (x,y) \in D_1\,.$$

Como S está orientada, então:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_i}\; dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\; dS$

Um vetor normal a S_1 é dado por $\overrightarrow{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (0, 2y, 1)$. Este vetor aponta para cima.

Logo, $\overrightarrow{n_1} = \dfrac{(0,2y,1)}{\sqrt{1+4y^2}}$ e $dS = \sqrt{1+4y^2}\ dxdy$. Então,

$$\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\ dS = \iint\limits_{D_1} \Big(\big(4-y^2\big)^2 - x\,, -xy\,, 3\left(4-y^2\right) \Big) \cdot (0,2y,1)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(-2xy^2 + 12 - 3y^2\right) dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{3} \left(-2xy^2 + 12 - 3y^2\right) dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[-x^2y^2 + 12x - 3xy^2\right]_0^3\ dy = \int_{-2}^{2} \left(-9y^2 + 36 - 9y^2\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(-18y^2 + 36\right) dy =$$

$$= \left[-6y^3 + 36y\right]_{-2}^{2} = 2 \cdot (-6 \cdot 8 + 36 \cdot 2) = 48\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\ dS$*:*

Temos $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{\mathbf{i}}$ e $dS = dydz$. Então,

$$\iint\limits_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\ dS = \iint\limits_{D_2} \left(z^2 - 0, 0, 3z\right) \cdot (-1,0,0)\, dydz = -\iint\limits_{D_2} z^2\ dydz\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS$

Temos $\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{\mathbf{i}}$ e $dS = dydz$. Então,

$$\iint\limits_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\ dS = \iint\limits_{D_2} \left(z^2 - 3, -3y, 3z\right) \cdot (1,0,0)\ \ dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_2} \left(z^2 - 3\right)\ dydz = \iint\limits_{D_2} z^2\ dydz - 3 \iint\limits_{D_2}\ dydz\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\ dS$

Temos $\overrightarrow{n_4} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e $dS = dxdy$. Então,

$$\iint\limits_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\ dS = \iint\limits_{D_1} (-x, -xy, 0) \cdot (0,0,-1)\ \ dxdy = \iint\limits_{D_1} 0\ dxdy = 0\,.$$

Assim:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n_i} \, dS =$$

$$= 48 - \iint_{D_2} z^2 \, dydz + \iint_{D_2} z^2 \, dydz - 3 \iint_{D_2} \, dydz =$$

$$= 48 - 3 \iint_{D_2} \, dydz \, .$$

Mas

$$\iint_{D_2} \, dydz = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \, dzdy = \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2\right) \, dy =$$

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \, .$$

Finalmente:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 48 - 3 \cdot \frac{32}{3} = 48 - 32 = 16 \, .$$

Exercício 9: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = \left(x, y, -\frac{z^2}{2}\right)$ e S é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta AB, com $A = (0, 1, 2)$ e $B = (0, 2, 4)$ em torno do eixo z, onde o vetor normal $\vec{n}$ é exterior a S.

Solução: Uma parametrização do segmento AB é dada por:

$$\vec{r}(t) = A + t(B - A) = (0, 1, 2) + t\left((0, 2, 4) - (0, 1, 2)\right) =$$

$$= (0, 1, 2) + t\,(0, 1, 2) = (0, 1 + t, 2 + 2t)$$

com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $x(t) = 0 \, , y(t) = 1 + t =$ raio de uma circunferência transversal e $z(t) = 2 + 2t =$ altura dessa circunferência. Então, uma parametrização de S é dada por:

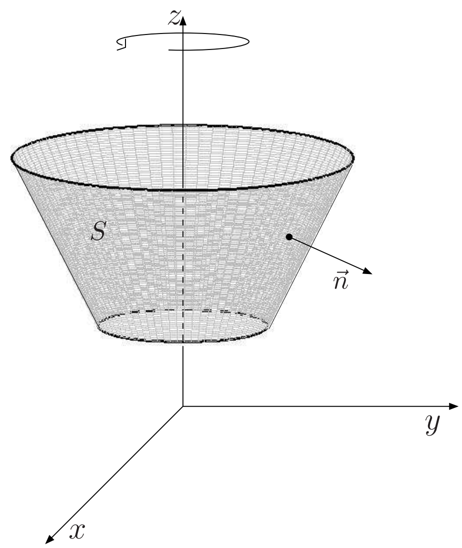
$$\vec{r}\,(t, \theta) = (y(t)\cos\theta \, , y(t) \operatorname{sen}\theta \, , z(t)) = ((1 + t)\cos\theta \, , (1 + t)\operatorname{sen}\theta \, , 2 + 2t)$$

onde $(t, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Um vetor normal a S é dado por

$$\vec{N} = \vec{r_t} \times \vec{r_\theta} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ -(1 + t)\operatorname{sen}\theta & (1 + t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(-2\,(1 + t)\cos\theta \, , -2\,(1 + t)\operatorname{sen}\theta \, , \underbrace{(1 + t)\cos^2\theta + (1 + t)\operatorname{sen}^2\theta}_{1+t}\Big) =$$

$$= (1 + t)\,(-2\cos\theta \, , -2\operatorname{sen}\theta \, , 1) \, .$$



Como $\overrightarrow{n}$ é exterior a S, então $\overrightarrow{n}$ aponta para baixo. Logo, $\overrightarrow{n} = -\dfrac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = \dfrac{(1+t)\,(2\cos\theta\,,2\,\mathrm{sen}\,\theta\,,-1)}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|}$ e $dS = \left\|\overrightarrow{N}\right\|\ dtd\theta$. Então,

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS =$$

$$= \iint\limits_D \left((1+t)\cos\theta\,,(1+t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,,-\frac{(2+2t)^2}{2}\right)\cdot(1+t)\,(2\cos\theta\,,2\,\mathrm{sen}\,\theta\,,-1)\,dtd\theta =$$

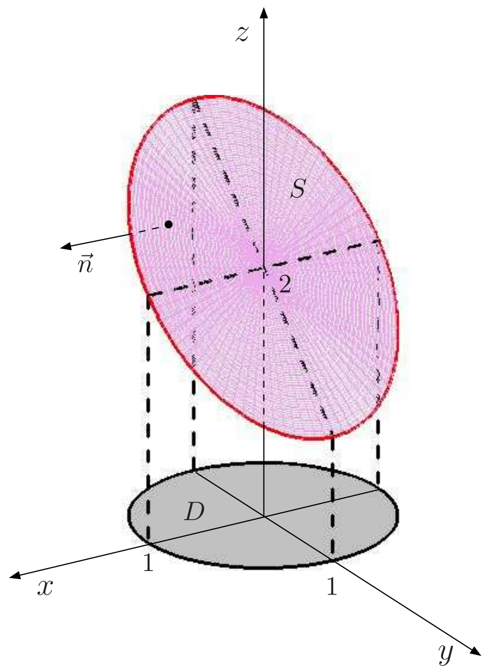
$$= \iint\limits_D \Big[\underbrace{2\,(1+t)^2\cos^2\theta + 2\,(1+t)^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}_{2(1+t)^2} + \frac{4}{2}\,(1+t)^2\Big]dt =$$

$$= \iint\limits_D \left[2\,(1+t)^2 + 2\,(1+t)^2\right]dt = \int_0^1 4\,(1+t)^2\int_0^{2\pi}\ d\theta dt =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{4}{3}\left[(1+t)^3\right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}(8-1) = \frac{56\pi}{3}\,.$$

Exercício 10: Calcule $\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS$, onde $\overrightarrow{F} = 3y^2z\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $y+z=2$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, com campo de vetores normais $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{k}} < 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} < 0$, então a terceira componente de $\overrightarrow{n}$ é negativa. Logo, $\overrightarrow{n}$ está voltada para baixo. Temos $S : z = z(x, y) = 2 - y$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Um vetor normal a S é dado por $\overrightarrow{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (0, 1, 1)$ que está voltado para cima. Logo, $\overrightarrow{n} = -\dfrac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = \dfrac{(0, -1, -1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\, dxdy$. Então,

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint\limits_D \left(3y^2(2-y)\,, y\,, 2-y\right) \cdot (0, -1, -1)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (-y - 2 + y)\, dxdy = -2 \iint\limits_D dxdy = -2A(D) = -2\pi\,.$$